ECE 2 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Surveillé n°4

Solution

Exercice 1. (D'après **ECRICOME 2011**)

(1) Vérifions que les conditions définies dans le sujet sont vérifiées:

- Δ est une matrice diagonale, donc en particulier Δ est diagonalisable ($\Delta = PDP^{-1}$ avec $P = I_2$ inversible et $D = I_2$ diagonale).
- $N \neq 0_2$ et $N^2 = 0_2$, donc N est nilpotente.
- $\Delta N = I_2 N = N = N I_2 = N\Delta$ et $A = N + \Delta$.

Conclusion : (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.

(2) (a) On sait que $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible. Appliquons la méthode de Gauss-Jordan :

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

devient par $L_2 \leftrightarrow L_1$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

devient par $L_2 \leftarrow 2L_2 + (3-\lambda)L_1$:

$$\begin{pmatrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & (\lambda-1)(\lambda-2) & (2\lambda+4) \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = T_\lambda$$

On en déduit les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } A &\iff A - \lambda I_3 \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff T_\lambda \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff (\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \text{ ou } 1-\lambda = 0 \qquad (\text{car } T_\lambda \text{ est triangulaire}) \\ &\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 2 \end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de A sont donc les réels 1 et 2.

(b) Déterminons le sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1.

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 &\iff AX = X \\ &\iff (A - I_3)X = 0_3 \\ &\iff T_1 X = 0_3 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x - y + 2z &=& 0 \\ 6z &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y &=& -2x \\ z &=& 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix} \ : \ x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

En particulier E_1 est de dimension 1. On obtient de même le sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2.

$$E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \ : \ x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

En particulier E_2 est de dimension 1. Au final, A est une matrice carrée d'ordre 3 admettant pour seules valeurs propres 1 et 2 et on a

$$\dim(E_1) + \dim(E_2) = 2 \neq 3$$

Donc A n'est pas diagonalisable.

(3) (a) Sans difficulté :

$$\Delta X_1 = 2X_1, \qquad \Delta X_2 = X_2, \qquad \Delta X_3 = X_3.$$

(b) La famille (X_1, X_2, X_3) est une famille de vecteurs propres de Δ. Étudions sa liberté. Pour tous $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \lambda_1 X_2 + \lambda X_2 + \lambda_3 X_3 = 0 &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_3 &=& 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_3 &=& 0 \\ \lambda_2 &=& 0 \end{array} \right. \\ &\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_3 &=& 0 \\ -\lambda_3 &=& 0 \\ \lambda_2 &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

La famille (X_1, X_2, X_3) est donc libre.

Comme elle est formée de 3 vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et comme $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$, la famille (X_1, X_2, X_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, constituée de vecteurs propres de Δ associés respectivement aux valeurs propres 2,1,1.

Ainsi Δ est diagonalisable et en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, la matrice P est inversible et on a :

$$\Delta = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = PDP^{-1}.$$

(c) La méthode de Gauss-Jordan donne sans difficulté :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) (a) $N \neq 0_3$ et $N^2 = 0_3$, donc N est nilpotente.

(b)
- Δ est diagonalisable d'après 3.(b).
- N est nilpotente d'après 4.(a).
- On calcule que $\Delta N = N\Delta = N$.

Comme $A = \Delta + N$, (Δ, N) est bien une décomposition de Dunford de A.

(c) Comme les matrices N et Δ commutent, on peut appliquer la formule de binôme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = (N + \Delta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \Delta^{n-k}$$

Comme $N^2 = 0_3$, on a, pour tout entier $k \geq 2$,

$$N^k = N^2 N^{k-2} = 0_3,$$

ce qui permet de voir qu'il reste donc dans la somme précédente les deux premiers termes

$$A^n = \binom{n}{0} N^0 \Delta^n + \binom{n}{1} N^1 \Delta^{n-1} = \Delta^n + nN\Delta^{n-1},$$

ce qu'on voulait.

(d) Notons $\mathcal{P}_k$ la proposition : $\Delta^k N = N$.

- <u>initialisation</u>: On a déjà vu en 4.(b) que $\Delta N = N$. Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
- <u>hérédité</u>: Supposons $\mathcal{P}_k$ vraie pour un $k \geq 1$ fixé. Par hypothèse de récurrence, on a $\Delta^k N = N$. En multipliant à gauche par Δ, il vient

$$\Delta^{k+1} N = \Delta N = N$$

d'après l'initialisation. Il suit que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie et la récurrence est terminée. (Notons que le résultat est encore vrai pour $k = 0$.)

(e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par 4.(c) et 4.(d), on a $A^n = \Delta^n + nN$. Vérifions que (Δ^n, nN) est une décomposition de Dunford.

- $\Delta = PDP^{-1}$ d'après 3.(b).
  Par une récurrence immédiate et ultra-classique vue environ dix mille cinq cents fois, sur n, on obtient que $\Delta^n = PD^nP^{-1}$ avec
  $$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  diagonale. Donc la matrice Δ^n est bien diagonalisable. Cela commence bien et ça fait plaisir.

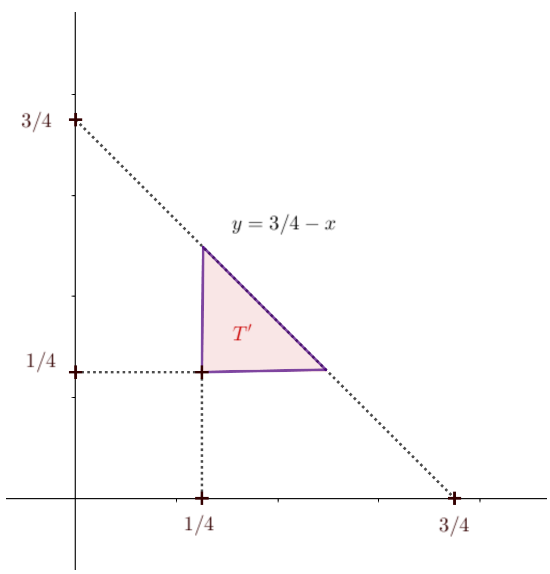
- $nN \neq 0_3$ et $(nN)^2 = n^2N^2 = n^2 0_3 = 0_3$ (d'après 4.(a))
  Donc la matrice nN est nilpotente. On est sur la bonne voie.

- Par 4.(d), on a : $\Delta^n(nN) = n\Delta^n N = nN$.
  Comme $N\Delta = N$, on peut montrer de façon analogue à 4.(d) que : $\forall k \geq 0,\ N\Delta^k = N$. Ainsi : $(nN)\Delta^n = nN = \Delta^n(nN)$ et ça commute et c'est tout bon. On sort le champagne.

Conclusion : (Δ^n, nN) est une décomposition de Dunford de A^n.

Exercice 2. (D'après **ECRICOME 2000**) Soit T est l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ solutions du système d'inéquations
$$x \geq \frac{1}{4}, \quad y \geq \frac{1}{4}, \quad x + y \leq \frac{3}{4}.$$
On note T' l'*intérieur* de T, à savoir l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ solutions du système d'inéquations
$$x > \frac{1}{4}, \quad y > \frac{1}{4}, \quad x + y < \frac{3}{4}.$$
Soit f la fonction définie sur T par
$$f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{x + y}.$$

(1) On représente les deux domaines ci-dessous. T contient les "bords" du triangle (en violet) alors que T' n'en contient que l'intérieur (en rouge).



(2) On admet que T' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Les trois applications $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto y$ et $(x, y) \mapsto x + y$ sont polynomiales donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et *a fortiori* sur T'. Pour $(x, y) \in T'$, chacune de ces expression est strictement positive. L'application $u \mapsto 1/u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$. Par composition

puis par somme, la fonction f est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur T'. On calcule alors les dérivées partielles d'ordre 1

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x,y) &= -\frac{1}{x^2}+\frac{2}{(x+y)^2}\\ \partial_2 f(x,y) &= -\frac{1}{y^2}+\frac{2}{(x+y)^2}\end{aligned}$$

(b) f admet un point critique si (et seulement si) son gradient $\nabla f(x,y)$ s'annule. Or celui-ci s'annule lorsque les deux dérivées partielles d'ordre 1 s'annulent

$$\begin{aligned}\nabla f(x,y)=0 &\iff \begin{cases} -\frac{1}{x^2}+\frac{2}{(x+y)^2} &= 0\\ -\frac{1}{y^2}+\frac{2}{(x+y)^2} &= 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} \frac{1}{x^2} &= \frac{2}{(x+y)^2}\\ \frac{1}{y^2} &= \frac{2}{(x+y)^2}\end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{x^2} &= \frac{2}{(x+y)^2}\\ \frac{1}{y^2} &= \frac{1}{x^2}\end{cases}\\ &\iff \begin{cases} x &= y\\ \frac{1}{x^2}-\frac{2}{(2x)^2} &= 0\end{cases}\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{1}{x^2}-\frac{2}{(2x)^2}=0 \iff \frac{1}{2x^2}=\frac{1}{x^2}$$

ce qui est bien évidemment impossible. Le système n'admet donc pas de solution et f n'admet pas de point critique et *a fortiori* pas d'extremum (ni local, ni global).

(3) Si la fonction f n'admet pas d'extrema, elle reste tout du moins bornée. En effet, comme $x\geq 1/4$ et que $y\geq 1/4$ et $x+y\leq 3/4$, on a nécessairement $x\leq 1/2$ et $y\leq 1/2$. Il suit que

$$2\leq\frac{1}{x}\leq 4,\qquad 2\leq\frac{1}{y}\leq 4, -4\quad\frac{-2}{x+y}\leq -\frac{8}{3}$$

et donc

$$0=2+2-4\leq f(x,y)\leq 4+4-\frac{8}{3}=\frac{16}{3},$$

ce qu'on attendait à droite mais pas à gauche. Il faut être plus subtil. On peut, en essayant de de pas tout estimer séparément. En mettant au même dénominateur, on a

$$f(x,y)=\frac{y(x+y)+x(x+y)-2xy}{xy(x+y)}=\frac{x^2+y^2}{xy(x+y)}.$$

Mais alors,

$$\begin{aligned}f(x,y)\geq 2 &\iff \frac{x^2+y^2}{xy(x+y)}\geq 2\\ &\iff x^2+y^2\geq 2xy(x+y)\\ &\iff x^2(1-2y)+y^2(1-2x)\geq 0\end{aligned}$$

Or, $x\leq 1/2$ donc $1-2x\geq 0$ et même chose pour y. Ainsi, cette inégalité est bien vérifiée et on a l'encadrement voulu. Ouf!

On considère alors une urne contenant des boules blanches (en proportion p), des boules rouges (en proportion r) et des boules vertes (en proportion u). On suppose que

$$p\geq\frac{1}{4},\qquad r\geq\frac{1}{4},\qquad u\geq\frac{1}{4},\qquad\text{et que}\quad p+r+u=1.$$

On effectue indéfiniment des tirages successifs d'une boule dans cette urne **avec remise** entre deux tirages. Pour tout entier naturel $n\geq 1$, on note B_n (respectivement R_n, V_n) l'événement: "On obtient une boule blanche (respectivement rouge, verte) au $n^{ième}$ tirage".

On appelle X (resp Y) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première blanche (resp rouge) et on définit alors la variable $D = |X - Y|$ égale au nombre de tirages séparant la sortie de la première blanche et de la première rouge.

(4) Les deux variables X et Y, en tant que temps d'attente, suivent clairement des lois géométriques. On a $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(r)$. En particulier, on connait, d'après le cours qu'il suffit de citer leurs espérances

$$E(X) = \frac{1}{p}, \qquad E(Y) = \frac{1}{r}.$$

(5) Soient i et j des entiers naturels non nuls.

(a) Comme demandé dans l'énoncé, on distingue les cas:

- Si $i = j$, alors l'évènement est impossible (on ne peut pas avoir deux boules différentes au $i-$ème tirage).
- Si $i < j$, alors on obtient des vertes aux $i - 1$ premiers tirages, puis une blanche au $i-$ème tirage puis des vertes ou des blanches jusqu'au $(j-1)-$ème tirage et une rouge au $j-$ème, c'est à dire

$$(X = i) \cap (Y = j) = \left(\bigcap_{k=1}^{i-1} V_k\right) \cap B_i \cap \left(\bigcap_{k=i+1}^{j-1} (B_k \cup V_k)\right) \cap R_j$$

- Si $j < i$ un raisonnement analogue permet d'écrire

$$(X = i) \cap (Y = j) = \left(\bigcap_{k=1}^{j-1} V_k\right) \cap R_j \cap \left(\bigcap_{k=j+1}^{i-1} (R_k \cup V_k)\right) \cap B_i$$

(b) Les tirages étant indépendants, on en déduit la loi du couple

$$P\left((X = i) \cap (Y = j)\right) = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j \\ u^{i-1}p(p+u)^{j-i-1}r, & \text{si } i < j \\ u^{j-1}r(r+u)^{i-j-1}p, & \text{si } j < i \end{cases}$$

(6) On montre que X et Y ne sont pas indépendantes en exhibant un contre-exemple, ce qui est facile ici. En effet,

$$P((X = 1) \cap (Y = 1)) = 0 \neq P(X = 1)P(Y = 1).$$

(7) On utilise la formule des probabilités totales et la loi du couple

$$\begin{aligned}
P(D=k) &= \sum_{j=1}^{+\infty} P((D=k)\cap(X=j)) = \sum_{j=1}^{+\infty} P((|X-Y|=k)\cap(X=j)) \\
&= \sum_{j=1}^{+\infty} \left(P((X-Y=k)\cap(X=j)) + P((Y-X=k)\cap(X=j))\right) \\
&= \sum_{j=k+1}^{+\infty} P((Y=j-k)\cap(X=j)) + \sum_{j=1}^{+\infty} P((Y=j+k)\cap(X=j)) \\
&= \sum_{j=k+1}^{+\infty} u^{j-(k+1)} r(r+u)^{k-1} p + \sum_{j=1}^{+\infty} u^{j-1} p(p+u)^{k-1} r \\
&= pr\left((r+u)^{k-1}\sum_{i=0}^{+\infty} u^i + (p+u)^{k-1}\sum_{i=0}^{+\infty} u^i\right) \\
&= \frac{pr}{1-u}\left((r+u)^{k-1} + (p+u)^{k-1}\right).
\end{aligned}$$

Or, $1-u = p+r$ et $r+u = 1-p$ et $p+u = 1-r$ donc, au final, on a bien

$$P(D=k) = \frac{pr}{p+r}\left((1-p)^{k-1} + (1-r)^{k-1}\right).$$

(8) D admet une espérance si la série de terme général $kP(D=k)$ converge. Or, $kP(D=k)$ est une combinaison de séries géométriques dérivées donc est bien le terme général d'une série convergence. De plus, on a

$$\begin{aligned}
E(D) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{pr}{p+r}\left((1-p)^{k-1} + (1-r)^{k-1}\right) \\
&= \frac{pr}{p+r}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-r)^{k-1}\right) \\
&= \frac{pr}{p+r}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{r^2}\right) \\
&= \frac{p^2+r^2}{pr(p+r)} = f(p,r)
\end{aligned}$$

d'après l'expression trouvée lors de l'estimation inférieure de f. Comme $(p,r) \in T$ d'après les données du texte, on a bien l'encadrement sur f qui s'applique ou encore

$$2 \leq E(D) \leq \frac{16}{3}.$$

Exercice 3. (D'après **FG - School of Life - 2018**) On considère la fonction de deux variables f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = 4x^2 - 2xy + 3y^2 + 5.$$

(1) La fonction f est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Pour trouver les points critiques, il faut chercher où le gradient s'annule, et donc commencer par calculer ce dernier en commençant par former les dérivées partielles d'ordre 1. C'est parti.

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x,y) &= 8x - 2y \\
\partial_2 f(x,y) &= -2x + 6y
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 8x-2y \\ -2x+6y \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 8x-2y &=& 0 \\ -2x+6y &=& 0 \end{array} \right. \iff (x,y) = (0,0)$$

et il n'y a qu'un seul point critique $(0,0)$ pour f.

(3) Pour connaître la nature du point critique, on forme la matrice hessienne au point critique, ce qui nécessite tout d'abord de calculer les dérivées partielles d'ordre 2.

$$\begin{aligned}
\partial^2_{1,1} f(x,y) &= 8 \\
\partial^2_{1,2} f(x,y) &= \partial^2_{2,1} f(x,y) = -2 \qquad \text{(il y a égalité par le théorème de Schwarz)} \\
\partial^2_{2,2} f(x,y) &= 6
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$H = \nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

On cherche alors ses valeurs propres.

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } H &\iff H - \lambda I_2 \text{ non inversible} \\
&\iff \det\left(\begin{pmatrix} 8-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{pmatrix}\right) = 0 \\
&\iff (8-\lambda)(6-\lambda) + 4 = 0 \\
&\iff \lambda^2 - 14\lambda + 44 = 0 \\
&\iff \lambda = 7 - \sqrt{5} \text{ ou } \lambda = 7 + \sqrt{5}.
\end{aligned}$$

La matrice hessienne au point critique a deux valeurs propres strictement positives, on peut donc conclure que $(0,0)$ est un minimum local (et que c'est le seul extremum (local)). Par ailleurs, ce minimum vaut

$$m = f(0,0) = 5.$$

(4) On souhaite représenter avec `SciLab` la surface $\mathcal{S}_f$, définie par

$$\mathcal{S}_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z = f(x,y),\ (x,y) \in [-2;2]^2\}.$$

(a) On a adoré le TP consacré à la représentation graphique des fonctions de deux variables et c'est avec plaisir et brio qu'on complète le programme:

```
function z=f(x,y)
    z=4*x^2-2*x*y+3*y^2+5;
endfunction

x=-2:.1:2;
y=x;
n=length(x);
z=zeros(n,n);
for i=1:n
    for j=1:n
        z(i,j)=f(x(i), y(j))
    end
end

plot3d(x,y,z)
```

(b) La seule surface qui présente un minimum est la troisième.

(c) Il semblerait que le mimimum local soit finalement un minimum global.

(5) Pour $y \neq 0$, on développe sans mal

$$y^2\left(3\frac{x^2}{y^2} + \left(\frac{x}{y} - 1\right)^2 + 2\right) = 4x^2 - 2xy + 3y^2 = f(x,y) - f(0,0).$$

(6) La quantité à développer est clairement positive ou nulle (produit de quantités positives car le membre de droite est somme de termes positifs et de carrés). Donc, pour tout $y \neq 0$, on a

$$f(x, y) \geq f(0, 0).$$

Si $y = 0$, alors $f(x, 0) = 4x^2 + 5 \geq 5 = f(0, 0)$. Il suit que f est toujours supérieur au minimum local qui est en fait un minimum global, ce qu'on avait conjecturé à la Question 4c. Tout est bien qui finit bien.

Exercice 4. On désigne par λ u réel strictement positif et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \lambda |x| e^{-\lambda x^2}$$

(1) (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \lambda |-x| e^{-\lambda(-x)^2} = f(x)$ et f est bien paire.
(b) On passe par l'intégrale partielle avec $M \to +\infty$

$$\begin{aligned}
\int_0^M \lambda |x| e^{-\lambda x^2} \mathrm{d}x &= \int_0^M \lambda x e^{-\lambda x^2} \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{-1}{2} e^{-\lambda x^2}\right]_0^M \\
&= -\frac{1}{2} e^{-\lambda M^2} + \frac{1}{2} \\
&\to \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\int_0^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$, impropre en $+\infty$, converge et vaut $\frac{1}{2}$.
(c) Par parité on a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x = 2 \int_0^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x = 1.$$

Comme, de plus, f est continue sur $\mathbb{R}$ et positive, f est bien une densité de probabilité.

(2) (a) Sans passer par l'intégrale partielle, puisque l'on ne nous demande pas de calculer l'intégrale, on procède par comparaison

$$\begin{aligned}
\frac{x \lambda x e^{-\lambda x^2}}{1/x^2} &= \lambda x^4 e^{-\lambda x^2} \\
&= \frac{(x^2)^2}{e^{\lambda x^2}} \to 0
\end{aligned}$$

et donc

$$\lambda x^2 e^{-\lambda x^2} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

de plus

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x$$

converge (c'est une intégrale de Riemann dont le critère est satisfait). Donc par majoration de fonctions positives, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x,$$

impropre en $+\infty$ est convergente.
(b) Comme la fonction $x \longmapsto x f(x)$ est elle impaire, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}x$$

converge et vaut zéro. Il suit que X admet une espérance et $E(X) = 0$.

(3) (a) On procède par IPP sur l'intégrale partielle $\displaystyle\int_0^M x^2\lambda x e^{-\lambda x^2}\mathrm{d}x$ avec $u'(x) = \lambda x e^{-\lambda x^2}$ que l'on a déjà primitivé $u(x) = -\frac{1}{2}e^{-\lambda x^2}$ et $v(x) = x^2$: $v'(x) = 2x$. Les fonctions u et v étant $\mathcal{C}^1$:

$$\begin{aligned}\int_0^M x^2\lambda x e^{-\lambda x^2}\mathrm{d}x &= \left[-x^2\frac{1}{2}e^{-\lambda x^2}\right]_0^M - \int_0^M -2x\frac{1}{2}e^{-\lambda x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{M^2}{2}e^{-\lambda M^2} - 0 + \frac{1}{\lambda}\int_0^M \lambda x e^{-\lambda x^2}\mathrm{d}x \\ &\to \frac{1}{2}\frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\dfrac{1}{2\lambda}$.

(b) Par parité, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\dfrac{1}{\lambda}$. Donc $E(X^2) = \dfrac{1}{\lambda}$ et on obtient finalement que X admet une variance avec

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \frac{1}{\lambda}.$$

(4) On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est à densité.

(a) Pur tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(Y \leq x) &= \left(X^2 \leq x\right) \text{ si } x \geq 0 \\ &= \left(|X| \leq \sqrt{x}\right) \\ &= \left(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}\right)\end{aligned}$$

donc

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}), & \text{si } x \geq 0\end{cases}$$

(b) F_X est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc (par composition) F_Y est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Attention, la racine n'est pas dérivable en 0. Une densité est alors obtenue en dérivant la fonction de répartition là où c'est possible (et en choisissant une valeur arbitraire ailleurs). Pour $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}f_Y(x) &= F_X'\left(\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}} + F_X'\left(-\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(f\left(\sqrt{x}\right) + f\left(-\sqrt{x}\right)\right) \\ &= \frac{2}{2\sqrt{x}}f\left(\sqrt{x}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}\lambda\sqrt{x}e^{-\lambda\sqrt{x}^2} \\ &= \lambda\exp(-\lambda x)\end{aligned}$$

Au final, on trouve

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \lambda\exp(-\lambda x), & \text{si } x \geq 0\end{cases}$$

On reconnait la loi exponentielle: $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

(c) On a donc $E(X^2) = E(Y) = \dfrac{1}{\lambda}$ d'où $V(X) = E(X^2) = \dfrac{1}{\lambda}$ puisque $E(X) = 0$.

(5) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$.

(a) On pose $W = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
(W \leq x) &= \left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leq x\right) \\
&= (1 - U \geq \exp(-\lambda x)) \\
&= (U \leq 1 - \exp(-\lambda x)) \\
\mathrm{P}(W \leq x) &= \mathrm{P}(U \leq 1 - \exp(-\lambda x)) \\
&= F_U(1 - \exp(-\lambda x))
\end{aligned}$$

Connaissant la fonction de répartition de U, que l'on rappelle par bonté d'âme,

$$F_U(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

on conclut (et c'est classique et déjà fait en classe) que $W \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

On cherche à estimer λ. On considère un échantillon $(Y_1, \cdots, Y_n)$ de la loi de Y, supposées indépendantes et de même loi que Y.

(6) On considère $x_1, \cdots, x_n$ strictement positifs ainsi que la fonction L définie sur $]0, +\infty[$:

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} f_Y(x_k)$$

(a) Connaissant une densité de Y, on a

$$\begin{aligned}
L(\lambda) &= \prod_{k=1}^{n} \lambda \exp(-\lambda x_k) \\
&= \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum x_k\right)
\end{aligned}$$

Comme un produit d'exponentiel est l'exponentielle de la somme, il vient

$$\ln(L(\lambda)) = n\ln(\lambda) - \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

(b) On considère la fonction φ définie pour tout réel de $]0, +\infty[$ par :

$$\varphi(\lambda) = n\ln(\lambda) - \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k$$

φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\begin{aligned}
\varphi'(\lambda) &= \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n} x_k \\
&= \frac{n - \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k}{\lambda}
\end{aligned}$$

donc

x	0		$n/\sum x_k$		$+\infty$
$\varphi'(\lambda)$		$+$	0	$-$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(n/\sum x_k)$	$\searrow$	$-\infty$

et φ a un maximum unique en

$$z = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} x_k}.$$

Comme $\varphi(\lambda) = \ln(L(\lambda))$, et que ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ alors z sera aussi un maximum pour la fonction L.

(7) On pose désormais

$$Z_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} Y_k}.$$

La suite $(Z_n)_{n\geq 2}$ est appelé estimateur du maximum de vraisemblance pour λ. On admet que $\sum_{k=1}^{n} Y_k$ a pour densité la fonction f_n définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}, & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

(a) Par le théorème de transfert, Z_n a une espérance si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n}{t} f_n(t)\, \mathrm{d}t$$

converge absolument. Or,

$$\int_{-\infty}^{0} t f_n(t)\, \mathrm{d}t = 0$$

et

$$\begin{aligned} \frac{n}{t} f_n(t) &= \frac{n}{t} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} \\ &= \lambda \frac{n}{n-1} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} t^{n-2} e^{-\lambda t} \\ &= \lambda \frac{n}{n-1} f_{n-1}(t) \text{ donc} \\ \int_0^{+\infty} t f_n(t)\, \mathrm{d}t &= \lambda \frac{n}{n-1} \int_0^{+\infty} f_{n-1}(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \lambda \frac{n}{n-1}. \end{aligned}$$

Au final,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\, \mathrm{d}t$$

converge et vaut $\lambda \frac{n}{n-1}$. Ainsi, Z_n a une espérance et

$$E(Z_n) = \lambda \frac{n}{n-1}.$$

(b) En posant $Z'_n = \frac{n-1}{n} Z_n$, on a clairement $E(Z'_n) = \frac{n-1}{n} E\left(\frac{n-1}{n} Z_n\right) = \lambda$.