Devoir Surveillé n°4

Durée: 4 heures

*Toutes les réponses doivent êtres **justifiées**. Tous documents et calculatrice interdits.*

Exercice 1. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est A.

(1) Montrer, sans pivot, que A n'est pas inversible et déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

(2) (a) Calculer A^2, A^3, A^4.
(b) Déterminer noyau de f et préciser sa dimension.

(3) (a) Montrer que si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^4$, avec $u \neq 0$ et $f(u) = \lambda u$, alors $f^4(u) = \lambda^4 u$. En déduire que $\lambda^4 = 0$ puis que $\lambda = 0$.
(b) Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est diagonale? (*On raisonnera par l'absurde en utilisant la question précédente.*)

(4) On note

$$\varepsilon_1 = e_1, \quad \varepsilon_2 = f(\varepsilon_1), \quad \varepsilon_3 = f(\varepsilon_2), \quad \varepsilon_4 = f(\varepsilon_3)$$

et $\mathcal{C} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$.

(a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
(b) Déterminer la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$.

(5) Existe-t-il un endomorphisme bijectif g de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ tel que $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$?

Exercice 2. On considère la fonction $f\ : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout x de $[0; +\infty[$, par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1}, & \text{si } x > 0 \\ \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(1) (a) Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
(b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, calculer $f'(x)$.
(c) Rappeler la valeur des réels $a, b \in \mathbb{R}$ intervenant dans le développement limité de e^x en 0 à l'ordre 1 de sorte que

$$e^x = a + bx + o(x).$$

(d) Montrer que $f'(x)$ tend vers $-\dfrac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0. On pourra utiliser le développement limité de e^x à l'ordre 2 dont on rappelle une partie ci-dessous
$$e^x = a + bx + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$
(e) Montrer ensuite que f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$.

(2) (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ et que, pour tout $x > 0$,
$$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2).$$
(b) Étudier les variations de la fonction
$$g: \ x \in [0;+\infty[\longmapsto xe^x - 2e^x + x + 2.$$
(c) En déduire que
$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad f''(x) > 0.$$
(d) En déduire le sens de variation de f. On précisera la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f.
(e) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

(3) On considère la suite (u_n) définie par
$$u_0 = 0, \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$
(a) Montrer que, pour tout $x \geq 0$,
$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad 0 \leq f(x) \leq 1.$$
(b) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$.
(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|.$$
(d) Établir que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
(e) Écrire un programme sous `SciLab` qui calcule et affiche un entier N tel que $|u_N - \ln(2)| < 10^{-3}$.

Exercice 3. Dans tout cet exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2, d'apparence identique et contenant chacune N boules indiscernables au toucher.
L'urne U_1 contient $(N-1)$ boules blanches et une boule noire.
L'urne U_2 contient N boules blanches.

I - Une première expérience aléatoire

On effectue des tirages **sans remise** dans l'urne U_1, jusqu'à l'obtention de la boule noire.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire.
On notera pour tout entier naturel i non nul :

- N_i l'événement "on tire une boule noire lors du i-ième tirage".
- B_i l'événement "on tire une boule blanche lors du i-ième tirage".

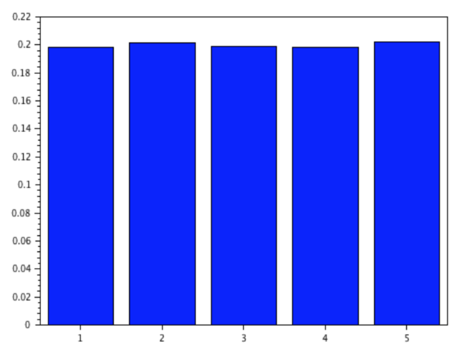
(1) Préciser $X(\Omega)$.
(2) Recopier et compléter la fonction `SciLab` suivante pour qu'elle simule la variable X

```
function X=tirage(N)
    X=1;
    while .......................
        X=.......................
    end
endfunction
```

(3) On simule 10000 fois cette expérience aléatoire.
Recopier et compléter le programme `SciLab` suivant pour qu'il affiche la suite S des fréquences observées de prise de valeur $(X = k)$ (pour chaque $k \in X(\Omega)$) lors de 10000 simulations de X, où le nombre N de boules est entré par l'utilisateur.

```
N = input('N=?') ;
S = zeros(1,N);
for k = 1 : 10000
        i=tirage(N)
        S(i) = .................
end
S=S/10000;
```

(4) On rajoute la commande `bar(S)`, permettant d'afficher l'*histogramme* des valeurs de S. On entre 5 au clavier et on obtient l'histogramme suivant :



Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la loi de la variable aléatoire X ?

Pour les questions suivantes, on revient au cas général où $N \geqslant 3$.

(3) En écrivant soigneusement les événements utilisés, calculer $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.
(4) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
(5) Préciser le nombre moyen de tirages nécessaires à l'obtention de la boule noire.

II - Une deuxième expérience aléatoire

On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules **sans remise** jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie.
On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués.
On note :

- C_1 l'événement "on choisit l'urne U_1".
- C_2 l'événement "on choisit l'urne U_2".

(1) Montrer que pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$:

$$P_{C_1}(Y = j) = \frac{1}{N}.$$

(2) Calculer $P_{C_2}(Y = j)$ pour tout entier $j \in [\![1, N]\!]$. *(On distinguera les cas $j = N$ et $1 \leqslant j \leqslant N-1$).*

(3) Montrer que :

$$P(Y=j)=\begin{cases}\dfrac{1}{2N} & \text{si } j\in[\![1,N-1]\!]\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2N} & \text{si } j=N\end{cases}$$

(4) Calculer l'espérance de Y.

III - Une troisième expérience aléatoire (*Partie facultatitve hors-barême*)

On effectue une succession infinie de tirages **avec remise** dans l'urne U_1. On admet qu'on obtient presque-sûrement au moins une boule blanche et au moins une boule noire lors de ces tirages.
On note T la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.
On note U la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.
Par exemple, si les tirages ont donné successivement : noire, noire, noire, blanche, blanche, noire,..., alors $T=4$ et $U=1$.

(1) Préciser les valeurs prises par T.
(2) Montrer soigneusement que pour tout entier $k\geqslant 2$,

$$P(T=k)=\frac{1}{N}\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}+\frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}.$$

(3) Montrer que la variable aléatoire T admet une espérance que l'on calculera.
(4) (a) Calculer $P([U=1]\cap[T=2])$.
  (b) Calculer $P([U=1]\cap[T=k])$ pour tout entier $k\geqslant 3$.
(5) Soit j un entier tel que $j\geqslant 2$.
  (a) Calculer $P([U=j]\cap[T=j+1])$.
  (b) Que vaut $P([U=j]\cap[T=k])$ pour tout entier $k\geqslant 2$ tel que $k\neq j+1$?
(6) Les variables aléatoires T et U sont-elles indépendantes ?
(7) Calculer $P(U=1)$ puis déterminer la loi de U.