Ecricome 2018, voie E

Solution

Exercice 1.

Partie I

(1) (a) Le calcul donne

$$A^2 - 7A = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = -12 I_3$$

(b) La relation matricielle obtenue à la question précédente permet de voir que le polynôme $X^2 - 7X + 12$ est un polynôme annulateur de A. Par conséquent, les valeurs propres de A sont à chercher parmi les racines de ce dernier. Un rapide calcul de discriminant permet de voir que les deux racines sont 4 et 3, ce qui répond à la question posée.

(c) On résout les équations

$$\begin{aligned} u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A - 3I_3) \quad & \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y - 2z & = & 3x \\ 3y & = & 3y \\ x - y + 5z & = & 3z \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow \quad x - y + 2z \ = \ 0 \\ & \Longleftrightarrow \quad u = \begin{pmatrix} y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que 3 est bien valeur propre de A et que la famille

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

engendre le sous-espace propre associé, noté E_3. Les deux vecteurs susmentionnés étant clairement non colinéaires, ils forment une base de E_3 dont la dimension est alors égale à 2.

On fait la même chose pour 4:

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - 4I_3) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y - 2z & = & 4x \\ 3y & = & 4y \\ x - y + 5z & = & 4z \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x - y + 2z & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & -x \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff u = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Il suit que 4 est bien valeur propre et que le sous-espace propre associé, noté E_4 est de dimension 1, et qu'une base est par exemple

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ainsi, les valeurs propres de A sont bien 3 et 4:

$$\sigma(A) = \{3; 4\}.$$

(d) On voit notamment que 0 n'est pas valeur propre, ce qui équivaut que fait que A est bien inversible. De plus, la somme des dimensions des sous-espaces propres est bien égale à celle de l'espace tout entier

$$\dim(E_3) + \dim(E_4) = 2 + 1 = 3,$$

ce qui garantit que A est diagonalisable.

(2) (a) Il faut résoudre.

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x - y - z & = & 0 \\ -3x + 3y - 3z & = & 0 \\ -x + y + z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff u = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le noyau n'est pas réduit au vecteur nul ce qui permet d'affirmer que 0 est valeur propre de f et que l'espace propre associé est

$$E_0 = \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

(b) On observe que

$$B - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et il est alors clair que

$$\mathrm{Im}(B - 2I_3) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

et que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Ainsi, $\mathrm{rg}(B - 2I_3) = 2$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(B - 2I_3)) = 1$ et $B - 2I_3$ non inversible donc 2 est donc valeur propre de f.

(c) Le calcul donne

$$f(e_1 - e_2 - e_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} = 3\,(e_1 - e_2 - e_3)$$

ce qui permet d'affirmer que 3 est valeur propre de f.

(d) Les questions précédentes nous fournissent trois valeurs propres distinctes pour f (qui sont $0, 2$ et 3) donc f est diagonalisable.

(3) D'après les conditions du texte, P doit être la matrice de passage de la base canonique vers une base de vecteurs propres à la fois pour A et pour f et l'ordre des vecteurs propres est donné par la matrice diagonale D_2. D'après les questions précédentes, en prenant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car $e_1 - e_2 - e_3$ est vecteur propre associé à 3 pour f mais on voit que

$$e_1 - e_2 - e_3 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_3$$

est donc vecteur propre associé à 3 pour A. De plus, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est à la fois dans E_3 (donc vecteur propre associé à 3 pour A) et dans le noyau de f (donc vecteur propre associé à 0 pou f). Enfin $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_4$ donc est vecteur propre associé à 4 pour A et un bref calcul permet de voir qu'il est aussi vecteur propre associé à 2 pour f. Toutes les conditions voulues sont réunies et on a

$$D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, P étant une matrice de passage vers une base de R^3 (par concaténation des sous-espaces propres), celle-ci est naturellement inversible.

Partie II

(1) On injecte la définition de Y_n mais on commence par observer que

$$P^{-1}A = D_2P^{-1}, \qquad \text{et} \qquad P^{-1}B = D_1P^{-1}.$$

$$\begin{aligned} Y_{n+2} &= P^{-1}X_{n+2} \\ &= P^{-1}\left(\frac{1}{6}AX_{n+1} + \frac{1}{6}BX_n\right) \\ &= \frac{1}{6}P^{-1}AX_{n+1} + \frac{1}{6}P^{-1}BX_n \\ &= \frac{1}{6}D_1P^{-1}X_{n+1} + \frac{1}{6}D_2P^{-1}X_n \\ &= \frac{1}{6}D_1Y_{n+1} + \frac{1}{6}D_2Y_n, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(2) Comme

$$D_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

la relation précédente donne immédiatement

$$Y_{n+2} = \frac{1}{6} D_1 Y_{n+1} + \frac{1}{6} D_2 Y_n \iff \left\{ \begin{array}{lcl} a_{n+2} & = & \frac{1}{6} \times 3a_{n+1} + \frac{1}{6} \times 3a_n \\ b_{n+2} & = & \frac{1}{6} \times 3b_{n+1} + 0 \\ c_{n+2} & = & \frac{1}{6} \times 4c_{n+1} + \frac{1}{6} \times 2c_n \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{lcl} a_{n+2} & = & \frac{1}{2} a_{n+1} + \frac{1}{2} a_n \\ b_{n+2} & = & \frac{1}{2} b_{n+1} \\ c_{n+2} & = & \frac{2}{3} c_{n+1} + \frac{1}{3} c_n \end{array} \right. ,$$

ce qu'on nous demandait.

(3) Comme clairement

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice introduite comme P^{-1} est bien l'inverse de P (par unicité de celle-ci). Ensuite, on obtient

$$Y_0 = P^{-1} X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad Y_1 = P^{-1} X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(4) On reconnait deux suites à récurrence linéaire d'ordre 2 ((a_n) et (c_n)) et pour b_n une suite géométrique de raison $1/2$. On commence par celle-ci car c'est la plus immédiate à exprimer

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Pour les deux autres, on suit le protocole du cours, en commençant par introduire l'équation caractéristique. Pour (a_n), celle ci est

$$q^2 - \frac{1}{2} q - \frac{1}{2} = 0 \iff q = 1 \quad \text{ou} \quad q = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$a_n = \lambda \times 1^n + \mu \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

où λ et μ sont à déterminer avec les conditions initiales. En injectant les valeurs pour $n = 0$ et $n = 1$, on trouve

$$a_n = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Enfin, pour (c_n), l'équation caractéristique est

$$q^2 - \frac{2}{3} q - \frac{1}{3} = 0 \iff q = 1 \quad \text{ou} \quad q = -\frac{1}{3}.$$

Ainsi,

$$c_n = \lambda + \mu \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

et on applique la même méthode pour trouver λ et μ, pour obtenir

$$c_n = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

(5) Par définition

$$Y_n = P^{-1}X_n \iff X_n = PY_n.$$

Ou encore

$$X_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

On veut seulement β_n, résultat de la deuxième ligne de P appliquée à Y_n, et on trouve

$$\beta_n = -a_n + b_n = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

et on retrouve avec une certaine fierté l'égalité demandée.

(6) Le programme demandé reprend la structure classique d'un programme permettant le calcul des termes d'une suite à récurrence linéaire d'ordre 2.

```
function res=X(n)
    Xold=[3;0;-1]
    Xnew=[3;0;-2]
    A=[2,2,-2;0, 3,0; 1, -1, 5]
    B=[1,-1,-1; -3,3,-3;-1, 1, 1]
    for i=2:n
        Aux=1/6*A*Xnew+1/6*B*Xold
        Xold=Xnew
        Xnew=Aux
    end
    res=Xnew
endfunction
```

(7) Pour chaque suite, le dernier terme représenté correspond à $n = 10$. Pour cette valeur de n, les termes de chaque suite sont proches de leurs limites. On voit que

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{11}{6} \sim 1.8, \qquad \lim_{n\to+\infty} \beta_n = -\frac{4}{3} \sim -1.3$$

Ainsi, la suite avec des croix $\times$ correspond à (α_n), celle avec des croix entourées à (β_n) et celle avec des losanges à (γ_n).

Exercice 2.

Partie I : Étude de suite

(1) (a) La limite en 0 ne pose aucun problème, c'est celle du log, on a donc

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty.$$

En $+\infty$, on a une forme indéterminée; mais on met tout sous un même logarithme et on sait que $x/(x+1)$ tend vers 1 donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0.$$

(b) Sur $\mathbb{R}_+^*$, f est dérivable comme combinaison de fonctions usuelles dérivables. On a d'ailleurs

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x + (x+1)^2 - x(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0.$$

On en déduit le tableau de variations de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$
f	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$ 0

(c) Par définition de la suite (u_n)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= f(n). \end{aligned}$$

(d) D'après le tableau de variations de f, on voit que $f(x) < 0$ pour tout $x > 0$. En particulier, $f(n) < 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, donc $u_{n+1} - u_n = f(n) < 0$ et la suite (u_n) est (strictement) décroissante.

(e) C'est un petit programme sans réelle difficulté que l'on peut faire avec une boucle `for` ou avec une opération pointée. On propose les deux versions.

```
function y=u(n)
    y=0;
    for k=1:n
        y=y+1/k;
    end
    y=y-log(n)
endfunction
```

ou bien

```
function y=u(n)
    y=sum([1:n].^(-1))-log(n)
endfunction
```

(2) (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - \frac{1}{n+1} - u_n + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

et c'est ce qu'on voulait.

(b) On peut étudier la fonction différence ou utiliser un argument de convexité. En effet, la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est concave sur $]-1; +\infty[$ (elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et sa dérivée seconde est strictement négative). Sa courbe représentative se trouve donc au dessous de toutes ses tangentes, y compris celle en $x = 0$ qui a pour équation $y = x$, et qui donne bien l'inégalité attendue.

En appliquant cette inégalité à $x = 1/n$, on voit que $v_{n+1} - v_n \geq 0$ ou encore que (v_n) est croissante.

(c) La formule de Taylor-Young, ou une connaissance du cours permet d'écrire de développement limité à l'ordre 2 en 0 de cette fonction usuelle

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Comme $1/n \to 0$, si $n \to +\infty$, on peut utiliser ce DL dans l'expression de $v_{n+1} - v_n$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ou encore

$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

(d) La série de terme général $1/2n^2$ est convergente comme multiple d'une série de Riemann convergente. Par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série de terme générale $v_{n+1} - v_n$ est donc de même nature c'est à dire convergente. On note alors γ la valeur de sa somme

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty}(v_{n+1} - v_n).$$

(e) Le calcul de la somme partielle de la série susnommée fait apparaitre une somme télescopique;

$$\sum_{k=1}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) = v_n - v_1 = v_n - v_n - u_1 + 1 = v_n$$

Ainsi, (v_n) est convergente et

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1}(v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=1}^{n+\infty}(v_{k+1} - v_k) = \gamma.$$

(3) (a) Cette question n'étant pas vraiment formulée; on interprète l'énoncé comme une demande de justification de la convergence de (u_n) et le calcul de sa limite. On voit que

$$v_n = u_n - \frac{1}{n} \Longleftrightarrow u_n = v_n + \frac{1}{n}.$$

Comme (v_n) converge et que $1/n \to 0$, on en déduit que (u_n) converge et a la même limite que (v_n), c'est à dire γ.

(b) (v_n) étant croissante et convergente vers γ, (u_n) étant décroissante et convergente vers γ, on a bien l'encadrement demandé

$$v_n \leq \gamma \leq u_n.$$

Ceci permet de voir que

$$0 \leq u_n - \gamma = v_n - \gamma + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n},$$

ce qui donne bien

$$|u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}.$$

(c) Le programme proposé permet de calculer une approximation de γ à la précision `eps` près (rentrée par l'utilisateur). En effet, une telle approximation sera réalisée par un terme u_n tel que $|u_n - \gamma| <$ `eps`, ce qui, d'après la question précédente a lieu dès que $1/n <$ `eps`. Il suffit de prendre le premier entier n tel que $n > 1/$`eps`, donné par $\lfloor$`1/eps`$\rfloor + 1$.

Partie II: Étude d'une série

(1) Le terme général de la série est équivalent à celui d'une série convergente. En effet,

$$a_n = \frac{1}{n(2n-1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2},$$

et la convergence de ce terme a été justifiée ci-avant.

(2) (a) Observons que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$$

et on reconnait une décomposition des indices de sommation selon leur parité. Plus précisément,

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \quad = \quad \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{1}{k}$$

Or,

$$\begin{cases} 1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} k = 2j \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} 1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ impair} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} k = 2j-1 \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j-1}$$

(b) Il suffit de mettre au même dénominateur et de procéder par identification

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n(2n-1)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{\alpha(2n-1)+\beta n}{n(2n-1)} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta &= 0 \\ -\alpha &= 1 \end{cases} \\
&\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha &= -1 \\ \beta &= 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

(c) On utilise les résultats des deux dernières questions

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} \qquad \text{(d'après 2b.)} \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 2\left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \qquad \text{(d'après 2a.)} \\
&= 2\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= 2\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

(3) (a) On revient à la définition de u_n

$$\begin{aligned} u_{2n} - u_n + \ln(2) &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) + \ln(2) \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2) - \ln(n) + \ln(n) + \ln(2) \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}, \end{aligned}$$

ce qu'on attendait.

(b) D'après 2c. et 3a., on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} a_k &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &= \lim_{n\to+\infty} 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= 2 \times \lim_{n\to+\infty} (u_{2n} - u_n + \ln(2)) \\ &= 2\ln(2), \end{aligned}$$

car, comme (u_n) converge, u_{2n} et u_n ont même limite et leur différence tend vers 0.

(4) (a) On voit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\left(1 + \frac{k}{n}\right)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}. \end{aligned}$$

(b) On sait plus ou moins[1] que, si g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x.$$

En prenant $g(x) = \ln(x+1)$, on voit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln(2),$$

et on retrouve bien la valeur précédente

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2 \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = 2 \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = 2\ln(2).$$

Exercice 3.

Partie I

[1] C'est par exemple démontré dans le sujet **EDHEC 2008**

(1) Á chacun des trois lancers, on a une probabilité $p = 2/3$ d'obtenir *Pile* (et 1/3 pour l'alternative contraire), on reconnait en X une loi binomiale
$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(3, 2/3).$$

(2) On voit que
$$P(A) = P([X=0] \cup [X=2]) = P([X=0]) + P([X=2]) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{1+3\times 4}{3^3} = \frac{13}{27}.$$

(3) Pour chaque valeur de X, on a une valeur différente de G. Si $X = 0$, alors $G = 0$, si $X = 1$, alors on perd 10 euros et $G = -10$, si $X = 2$, alors on gagne 20 euros et $G = 20$. Enfin, si $X = 3$, on perd 30 euros et $G = -30$. Au final,
$$G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}.$$

(4) On calcule l'espérance
$$\begin{aligned} E(G) &= -30P(G=-30) - 10P(G=-10) + 20P(G=20) \\ &= -30P(X=3) - 10P(X=1) + 20P(X=2) \\ &= -30\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 10 \times 3 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 20 \times 3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{-120}{27} \end{aligned}$$
On trouve donc que $E(G) < 0$ et le jeu est défavorable au joueur.

Partie II

(1) (a) Si $Y = 1$, alors $Z = 1$. Si $Y = -1$, alors $Z = 0$. On a bien $Z(\Omega) = \{0; 1\}$. De plus,
$$P(Z=1) = P(Y=1) = P(X \in 2\mathbb{N}) = P(A),$$
et on a bien $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A))$.

(b) D'après la question précédente, $E(Z) = P(A)$ et $Y = 2Z - 1$. Par linéarité de l'espérance, on a donc
$$E(Y) = E(2Z-1) = 2E(Z) - 1 = 2P(A) - 1.$$

(2) (a) Comme précédemment, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

(b) D'après le théorème de transfert
$$\begin{aligned} E(Y) &= E((-1)^X) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$
On utilise alors la formule du binôme
$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} = (-p+1-p)^n = (1-2p)^n.$$

(3) D'après les questions 1b. et 2b., on a
$$(1-2p)^n = E(Y) = 2P(A) - 1 \iff P(A) = \frac{(1-2p)^n + 1}{2}.$$

(4) On résout

$$\begin{aligned} P(A) \geq \frac{1}{2} &\iff \frac{(1-2p)^n+1}{2} \geq \frac{1}{2} \\ &\iff (1-2p)^n \geq 0 \\ &\iff n \text{ pair ou } 1-2p \geq 0 \\ &\iff n \text{ pair ou } p \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Partie III

(1) On "gagne" 10 euros pour chaque *Pile* (compté avec X) affecté du signe donné par Y selon la parité de X, ou encore

$$G = 10XY = 10X(-1)^X.$$

Toujours avec le théorème de transfert, on obtient

$$\begin{aligned} E(G) &= \sum_{k=0}^{n} 10k(-1)^k P(X=k) \\ &= 10\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

(2) Soit $k \in [\![1;n]\!]$.

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

(3) C'est un peu le même calcul que celui justifiant la formule de l'espérance de la binomiale.

$$\begin{aligned} E(G) &= 10\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}(-p)^k(1-p)^{n-k} \\ &= 10n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(-p)^k(1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= 10n(-p)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(-p)^j(1-p)^{n-1-j} \\ &= -10np(1-2p)^{n-1} \end{aligned}$$

(4) On connait déjà les conditions pour que $P(A) \geq 1/2$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} E(G) \leq 0 &\iff -10np(1-2p)^{n-1} \leq 0 \\ &\iff (1-2p)^{n-1} \geq 0 \\ &\iff 1-2p \geq 0 \text{ ou } n\text{impair} \end{aligned}$$

Comme n ne peut pas être pair et impair à la fois, l'intersection des conditions précédentes donne bien

$$\begin{cases} P(A) \geq \frac{1}{2} \\ E(G) \leq 0 \end{cases} \iff p \leq \frac{1}{2}.$$

(5) (a) La fonction f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et *a foriori* sur $[0;1/2]$. Le calcul donne

$$f'(x) = (1-2x)^{n-2}(1-2nx).$$

On obtient le tableau de variations suivant

x	0		$1/2n$		$1/2$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(1/2n)$	$\searrow$	0

avec

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}.$$

(b) La rentabilité est optimale pour le concepteur lorsque l'espérance du gain est minimale, ou, de manière équivalente, lorsque $f(p)$ est maximal sur $[0;1/2]$. Il faut donc choisir

$$p = \frac{1}{2n}.$$

Partie IV

(1) Ici, on explicite facilement la loi de G_i en revenant à la définition du jeu. $G_i(\Omega) = \{0, -10, 20\}$. et

a	0	-10	20
$P(G_i = a)$	$9/16$	$6/16$	$1/16$

Ceci permet de calculer facilement l'espérance et la variance

$$E(G_i) = -10 \times \frac{9}{16} + 20 \times \frac{1}{16} = -\frac{5}{2}$$

et

$$V(G_i) = E(G_i^2) = E(G_i)^2 = 100 \times \frac{9}{16} + 400 \times \frac{1}{16} - \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{225}{4} = \left(\frac{15}{2}\right)^2.$$

(2) Il est clair que le gain du forain est égal à l'opposé du total des gains de tous les joueurs, ou encore

$$J = -\sum_{i=1}^{200} G_i.$$

Par linéarité de l'espérance

$$E(J) = -\sum_{i=1}^{200} E(G_i) = -200 \times \left(-\frac{5}{2}\right) = 500$$

et, par indépendance (que l'on peut supposer) des G_i,

$$V(J) = (-1)^2 \sum_{i=1}^{200} V(G_i) = 200 \times \frac{225}{4} = 11250.$$

(3)

$$\begin{aligned} |J - 500| \geq 400 &\iff J - 500 \geq 400 \text{ ou } J - 500 \leq -400 \\ &\iff J \geq 900 \text{ ou } J \leq 100 \end{aligned}$$

En particulier, l'évènement

$$[J \leq 100] \subset [|J - 500| \geq 400]$$

et on a bien la comparaison des probabilités correspondantes voulue.

(4) En utilisant la question précédente et l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, on voit que
$$P(J \leq 100) \leq P(|J-500| \geq 400) \leq \frac{V(J)}{400^2} = \frac{11250}{160000} = \frac{9}{128}.$$
(5) Le forain installera son stand si $P(J \leq 100) \leq 10\%$. Or, cette probabilité est majorée par $9/128$ qui est inférieur à 10% (en effet $9/128 \leq 9/100 < 10\%$). Donc il peut installer son stand.