EMLyon 2018 - Voie Économique - Corrigé

Correction proposée par G. Dupont - LGT Gerville-Réache - Basse-Terre.

Exercice 1

1. **a.** On a $v = f(e_1)+e_1$ mais, puisque A est la matrice de f dans la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, la lecture de sa première colonne permet d'affirmer que $f(e_1) = -2e_2 + e_3$. Ainsi,

$$\boxed{v = f(e_1) + e_1 = e_1 - 2e_2 + e_3.}$$

b. Montrons que la famille $\mathscr{C} = (u, v, e_1)$ est libre. Soient $\lambda, \mu, \gamma \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\lambda u + \mu v + \gamma e_1 = 0 &\Leftrightarrow \lambda(e_1 - e_2) + \mu(e_1 - 2e_2 + e_3) + \gamma e_1 = 0 \\
&\Leftrightarrow (\lambda + \mu + \gamma)e_1 + (-\lambda - 2\mu)e_2 + \mu e_3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} \lambda + \mu + \gamma & = 0 \\ -\lambda - 2\mu & = 0 \\ \mu & = 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \lambda = \mu = \gamma = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{C}$ est une famille libre de $\mathbf{R}^3$. Puisque $\dim(\mathbf{R}^3) = 3$, il vient :

$$\boxed{\mathscr{C} \text{ est une base de } \mathbf{R}^3.}$$

c. Par définition de la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$, on a

$$\boxed{P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.}$$

Pour calculer P^{-1}, on peut procéder à un calcul d'inverse mais on peut plus élégamment utiliser le fait que P^{-1} est la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$ et que, si l'on pose $e_1' = u$, $e_2' = v$ et $e_3' = e_1$, alors on a les relations :

$$\left\{\begin{array}{ll} e_1 & = e_3' \\ e_2 & = e_3' - e_1' \\ e_3 & = -2e_1' + e_2' + e_3' \end{array}\right. .$$

Ainsi,

$$\boxed{P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.}$$

2. **a.** D'après la formule de changement de base, on a

$$A' = P^{-1}AP$$

et donc, en effectuant le produit, on obtient

$$\boxed{A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.}$$

b. La matrice A' est triangulaire, ses valeurs propres sont donc situées sur sa diagonale. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 2\}$ et puisque A' est une matrice représentative de l'endomorphisme f, il vient :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{-1, 2\}\,.}$$

En outre,

$$\mathrm{rg}(A' - 2I_3) = \mathrm{rg}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = 2$$

donc

$$\dim E_2(f) = \dim E_2(A') = \dim \ker(A' - 2I_3) = 3 - \mathrm{rg}(A' - 2I_3) = 1.$$

De même,

$$\mathrm{rg}(A' + I_3) = \mathrm{rg}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

donc

$$\dim E_{-1}(f) = \dim E_{-1}(A') = \dim \ker(A' + I_3) = 3 - \mathrm{rg}(A' + I_3) = 1.$$

Ainsi,

$$\dim E_{-1}(f) + \dim E_2(f) = 1 + 1 = 2 < 3 = \dim(\mathbf{R}^3).$$

En conclusion,

$$\boxed{f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

c. D'après la question précédente, on a $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$. Ainsi, $\ker f = \{0\}$ et donc f est injectif. Puisqu'il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ et que $\mathbf{R}^3$ est de dimension finie :

$$\boxed{f \text{ est bijectif.}}$$

d. Comme observé à la question **2.a**, on a la relation :

$$\boxed{A' = P^{-1}AP.}$$

3. **a.** On calcule :

$$\begin{aligned} g(e_1) &= g(1,0,0) = (1,0,-1) = e_1 - e_3 \\ g(e_2) &= g(0,1,0) = (1,2,1) = e_1 + 2e_2 + e_3 \\ g(e_3) &= g(0,0,1) = (-1,0,1) = -e_1 + e_3. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.}$$

b. Un produit matriciel direct donne :

$$\boxed{B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 2B.}$$

c. D'après **3.b**, on a $B^2 - 2B = 0$ donc $X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de B. Il s'ensuit que les valeurs propres possibles pour B sont les racines de $X^2 - 2X = X(X-2)$. Ainsi,

$$\mathrm{Sp}(B) \subset \{0, 2\}\,.$$

Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} X \in E_0(B) &\Leftrightarrow BX = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z &= 0 \\ 2y &= 0 \\ -x + y + z &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x &= z \\ y &= 0. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{E_0(B) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).}$$

De même,

$$\begin{aligned} X \in E_2(B) &\Leftrightarrow BX = 2X \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z &= 2x \\ 2y &= 2y \\ -x + y + z &= 2z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = y - z \\ &\Leftrightarrow X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{E_2(B) = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).}$$

d. On a $B \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et

$$\dim E_0(B) + \dim E_2(B) = 1 + 2 = 3$$

donc B est diagonalisable. La matrice B représentant l'endomorphisme g, on obtient :

$$\boxed{g \text{ est diagonalisable.}}$$

4. **a.** Montrons que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$.

— $\mathscr{E}$ est inclus dans $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ par définition.

— On a $B \times 0_3 = 0_3 = 0_3 \times A$ donc $0_3 \in \mathscr{E}$.

— Fixons $M, N \in \mathscr{E}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} B(\lambda M + N) &= \lambda BM + BN \\ &= \lambda MA + NA \quad (\text{car } M, N \in \mathscr{E}) \\ &= (\lambda M + N)A. \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda M + N \in \mathscr{E}$.

En conclusion,

$$\boxed{\mathscr{E} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_3(\mathbf{R}).}$$

b. Soit M une matrice appartenant à $\mathscr{E}$, on a donc $BM = MA$. Supposons que M est inversible. On peut alors réécrire la relation d'appartenance à $\mathscr{E}$ comme :

$$A = M^{-1}BM.$$

Les matrices A et B sont ainsi semblables. Or on a vu en **3.d** que B est diagonalisable et en **2.b** que A ne l'est pas, une contradiction. Ainsi,

$$\boxed{\text{Si } M \in \mathscr{E}, \text{ alors } M \text{ n'est pas inversible.}}$$

5. a. Le rang étant invariant par transposition, on a, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$\boxed{\operatorname{rg}(A - \lambda I_3) = \operatorname{rg}(\,{}^t(A - \lambda I_3)) = \operatorname{rg}(\,{}^tA - \lambda I_3).}$$

b. On a observé en **2.b** et **3.c** que $2 \in \operatorname{Sp}(A) \cap \operatorname{Sp}(B)$. Mais

$$\begin{aligned} \operatorname{Sp}(A) &= \{\lambda \in \mathbf{R} \mid \operatorname{rg}(A - \lambda I_3) < 3\} \\ &\underset{(\mathbf{5.a})}{=} \left\{\lambda \in \mathbf{R} \mid \operatorname{rg}(\,{}^tA - \lambda I_3) < 3\right\} \\ &= \operatorname{Sp}(\,{}^tA). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\alpha = 2 \in \operatorname{Sp}(\,{}^tA) \cap \operatorname{Sp}(B).}$$

c. On a $X \in E_2(B)$ donc $BX = 2X$ et $Y \in E_2(\,{}^tA)$ donc ${}^tAY = 2Y$. On a ainsi,

$$\begin{aligned} BN &= BX\,{}^tY \\ &= 2X\,{}^tY \\ &= 2N \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} NA &= X\,{}^tYA \\ &= X\,{}^t(\,{}^tAY) \\ &= X\,{}^t(2Y) \\ &= 2X\,{}^tY \\ &= 2N. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{BN = NA \text{ et donc } N \in \mathscr{E}.}$$

Il reste à montrer que N est non-nulle. On commence par observer que X et Y sont non nuls, donc en particulier, si on pose $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$, on a

$${}^tYY = [y_1, y_2, y_3] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{3} y_i^2 \neq 0.$$

Par l'absurde, supposons que $N = 0_3$, on a alors :

$$\begin{aligned} N = 0_3 &\Rightarrow NY = 0 \\ &\Rightarrow X\ {}^tYY = 0 \\ &\Rightarrow X \cdot \left(\sum_{i=1}^{3} y_i^2 \right) = 0 \\ &\Rightarrow X = 0, \end{aligned}$$

une contradiction. Ainsi,

$$\boxed{N \in \mathscr{E} \setminus \{0_3\}\,.}$$

d. On sait d'après **3.c** que $E_2(B)$ est de dimension 2. Fixons une base (X_1, X_2) de $E_2(B)$ et fixons un vecteur propre $Y \in E_2({}^tA)$. Il suit alors de la question **4.c** que $N_1 = X_1\ {}^tY$ et $N_2 = X_2\ {}^tY$ sont des éléments non nuls de $\mathscr{E}$. Montrons alors que la famille (N_1, N_2) est libre.
Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ tels que $\lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 = 0_3$. On a alors

$$\begin{aligned} \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 = 0_3 &\Rightarrow \lambda_1 X_1\ {}^tY + \lambda_2 X_2\ {}^tY = 0_3 \\ &\Rightarrow (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)\ {}^tY = 0_3. \end{aligned}$$

$E_2(B)$ étant un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$, si on pose $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, on a $X \in E_2(B)$ et $X\ {}^tY = 0_3$. Il suit alors de la question **4.c** que $X = 0$ et donc $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 = 0$. La famille (X_1, X_2) étant une base de $E_2(B)$, elle est en particulier libre et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
Ainsi, (N_1, N_2) est une famille libre formée de deux vecteurs de $\mathscr{E}$. Il s'ensuit que :

$$\boxed{\dim \mathscr{E} \geq 2.}$$

Exercice 2

Partie I : Étude de la fonction f

1. La fonction $x \mapsto x$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ donc f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$. Alors, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Par ailleurs,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x - \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = +\infty$$

et, par croissances comparées, $f(x) \underset{x:+\infty}{\sim} x$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Sur $]0,1[$, la fonction f est continue, strictement décroissante et ses limites aux bornes sont $+\infty$ et 1. Il suit du théorème de la bijection continue que f induit une bijection de $]0,1[$ vers $]1,+\infty[$. Puisque $2 \in]1,+\infty[$, il existe un unique réel $a \in]0,1[$ tel que $f(a) = 2$.
De même, sur $]1,+\infty[$, la fonction f est continue, strictement croissante et limites aux bornes sont 1 et $+\infty$. Il suit à nouveau du théorème de la bijection continue que f induit une bijection de $]1,+\infty[$ vers $]1,+\infty[$. Puisque $2 \in]1,+\infty[$, il existe un unique réel $b \in]1,+\infty[$ tel que $f(b) = 2$.
Enfin, $f(1) = 1 \neq 2$ et donc :

$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = 2 \text{ n'admet que deux solutions sur }]0,+\infty[\text{ : } a \in]0,1[\text{ et } b \in]1,+\infty[.}$$

3. On a

$$f(2) = 2 - \ln(2) \approx 1,3 < 2,$$

$$f(4) = 4 - \ln(4) = 4 - 2\ln(2) \approx 2,6 > 2.$$

La fonction f étant continue sur $[2;4]$, il suit du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $x \in [2,4]$ tel que $f(x) = 2$. Par unicité de la solution à cette équation sur $]1,+\infty[$, on a $x = b$ et donc :

$$\boxed{b \in [2;4].}$$

Partie II : Étude d'une suite

4. Montrons, par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n \in [b,+\infty[$.
<u>Initialisation :</u> Si $n = 0$, on a $u_0 = 4$ de sorte que u_0 est bien défini et $u_0 = 4 \geq b$ d'après **3**.
<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que u_n est défini et $u_n \geq b$. Alors $u_n > 0$ donc $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$ est bien défini. En outre, par croissance du logarithme, $\ln(u_n) \geq \ln(b) = b - 2$, la dernière égalité provenant du fait que $2 = f(b) = b - \ln(b)$. Ainsi, $u_{n+1} \geq b - 2 + 2 = b$ et donc $u_{n+1} \in [b,+\infty[$.
En conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, u_n \text{ existe et } u_n \geq b.}$$

5. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \ln(u_n) + 2 - u_n \\ &= 2 - (u_n - \ln(u_n)) \\ &= 2 - f(u_n) \end{aligned}$$

Mais $u_n \geq b$ d'après **4** et f est croissante sur $[b, +\infty[\subset [1, +\infty[$ d'après **1**. Ainsi, $f(u_n) \geq f(b) = 2$ et donc

$$u_{n+1} - u_n \leq 2 - 2 = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est décroissante.}}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant minorée par b d'après **4**, elle converge vers une limite $\ell \geq b$.
En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$ et en utilisant la continuité du logarithme, il vient

$$\ell = \ln(\ell) + 2$$

ou encore

$$f(\ell) = 2.$$

Par unicité de la solution de l'équation $f(x) = 2$ sur $]1, +\infty[$, on a $\ell = b$.
En conclusion,

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b.}$$

6. **a.** Considérons la fonction g définie sur $[b, +\infty[$ par $g(x) = \ln(x) + 2$. C'est une fonction dérivable et, pour tout $x \geq b$, on a

$$g'(x) = \frac{1}{x}.$$

Alors, puisque $b \geq 2$, on a :

$$\forall x \geq b, \quad |g'(x)| = \frac{1}{x} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}.$$

En outre, $g(b) = \ln(b) + 2 = b$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $g(u_n) = u_{n+1}$.
La suite (u_n) convergeant vers b en décroissant, il suit de l'inégalité des accroissements finis que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - b &= |u_{n+1} - b| \\ &= |g(u_n) - g(b)| \\ &\leq \frac{1}{2}|u_n - b| \\ &= \frac{1}{2}(u_n - b). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b).}$$

b. La suite (u_n) convergeant en décroissant vers b, on a déjà

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 0 \leq u_n - b.$$

Montrons alors par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$ que $u_n - b \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
<u>Initialisation :</u> Pour $n = 0$, puisque $b \in [2; 4]$ d'après **3**, il vient

$$u_0 - b = 4 - b \leq 4 - 2 = 2 = \frac{1}{2^{-1}} = \frac{1}{2^{0-1}}.$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Alors, il suit de **6.a** que

$$\begin{aligned} u_{n+1} - b &\leq \frac{1}{2}(u_n - b) \\ &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1}{2^{(n+1)-1}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

7. **a.** Nous proposons la fonction suivante :

```
function u = suite(n)
        u = 4
        for i=1:n
                u = log(u)+2
        end
endfunction
```

b. Nous nous appuyons ici sur la question **6.b** :

```
function b = valeur_approchee(epsilon)
        n = 0
        while (1/2^(n-1) > epsilon)
                n = n+1
        end
        b = suite(n)
endfunction
```

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

8. La fonction $t \mapsto f(t)$ est continue et ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$, elle y admet donc une primitive que l'on note G. On a alors :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Phi(x) = G(2x) - G(x).$$

Il s'ensuit que Φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= 2G'(2x) - G'(x) \\ &= \frac{2}{f(2x)} - \frac{1}{f(x)} \\ &= \frac{2}{(2x - \ln(2x))} - \frac{1}{(x - \ln(x))} \\ &= \frac{2(x - \ln(x)) - (2x - \ln(2x))}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))} \\ &= \frac{2x - 2\ln(x) - 2x + \ln(2x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))} \\ &= \frac{-2\ln(x) + \ln(2) + \ln(x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[, \quad \Phi'(x) = \frac{\ln(2)-\ln(x)}{(2x-\ln(2x))(x-\ln(x))}.}$$

9. Soit $x \in]0,+\infty[$. On a

$$x - \ln(x) = f(x) > 0 \quad \text{et} \quad 2x - \ln(2x) = f(2x) > 0$$

donc $\Phi'(x)$ est du signe de $\ln(2) - \ln(x)$, d'où le tableau de variations :

x	0		2		$+\infty$
$\Phi'(x)$		$+$	0	$-$	
Φ		$\nearrow$		$\searrow$	

10. Pour tout $t > 0$, il suit de **1** que $f(t) \geq 1$ donc $0 \leq \dfrac{1}{f(t)} \leq 1$. Ainsi, par croissance de l'intégrale :

$$\forall x > 0, \quad 0 \leq \Phi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{f(t)}\, dt \leq \int_x^{2x} 1\, dt = (2x - x) = x.$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall x > 0, \quad 0 \leq \Phi(x) \leq x.}$$

11. **a.** En appliquant le théorème d'encadrement à l'inégalité trouvée en **10**, on obtient

$$\lim_{x \to 0^+} \Phi(x) = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\Phi \text{ est prolongeable par continuité en } 0, \text{ avec } \Phi(0) = 0.}$$

b. Soit $x > 0$. On a

$$\Phi'(x) \underset{x:0^+}{\sim} \frac{-\ln(x)}{(-\ln(x))(-\ln(2x))} = -\frac{1}{\ln(2x)} \xrightarrow[x:0^+]{} 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\Phi'(x) \xrightarrow[x:0^+]{} 0.}$$

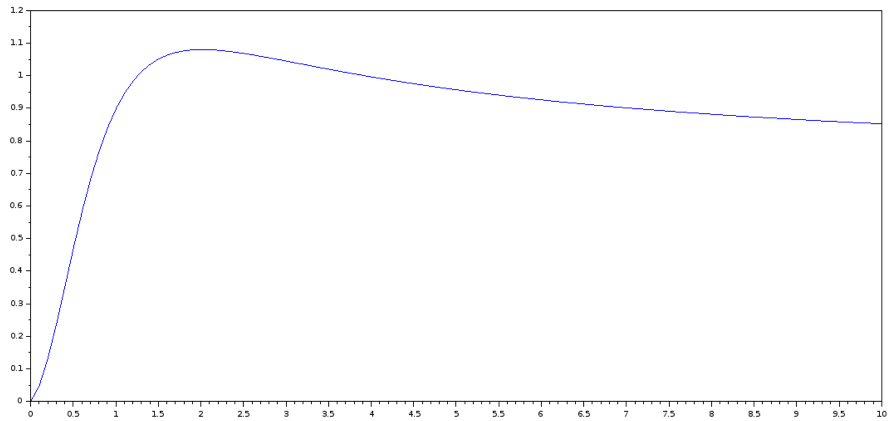
12. On commence par observer que l'on a les éléments caractéristiques suivants :

— Une asymptote horizontale d'équation $y = \ln(2)$ en $+\infty$;

— Une tangente horizontale au point $(2, \Phi(2))$;

— Une (demi-)tangente horizontale au point $(0, \Phi(0))$.

On obtient alors un graphique ayant l'allure suivante (celui-ci ayant été réalisé numériquement avec Scilab) :



Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

<u>Note du correcteur :</u> Dans l'énoncé, la fonction H est définie sur $U =]0,+\infty[^2$ mais nous allons étudier à la question 14 son comportement en $(a, \ln(a))$ qui n'est pas un élément de U puisque $\ln(a) < 0$ du fait que $a \in]0,1[$. Afin de palier cela, nous proposons de définir la fonction H sur l'ouvert $V =]0,+\infty[\times\mathbf{R}$ qui contient U et qui nous semble rester conforme aux objectifs de cette partie de l'exercice.

13. **a.** La fonction H est de classe $\mathscr{C}^2$ sur V comme somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur V, on peut donc calculer ses dérivées partielles premières et secondes. Ceci étant noté, on a :

$$\boxed{\forall (x,y)\in V, \partial_1(H)(x,y) = x - y - 2 \quad \text{et} \quad \partial_2(H)(x,y) = -x + e^y.}$$

b. Soit $(x,y)\in V$. Si on note $\mathrm{Crit}(H)$ l'ensemble des points critiques de H, on a

$$\begin{aligned}
(x,y)\in \mathrm{Crit}(H) &\Leftrightarrow \nabla(H)(x,y) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x-y-2 & = 0 \\ -x+e^y & 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x-y-2 & = 0 \\ x & = e^y \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x-y & = 2 \\ y & = \ln(x) \quad (\text{car } x>0) \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x-\ln(x) & = 2 \\ y & = \ln(x) \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} f(x)=2 & \\ y & = \ln(x) \end{array}\right. \\
&\underset{(2)}{\Leftrightarrow} \left\{\ x\in\{a,b\}\, y \quad = \ln(x)\right. \\
&\Leftrightarrow (x,y)\in\{(a,\ln(a)),\,(b,\ln(b))\}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Crit}(H) = \{(a,\ln(a)),\,(b,\ln(b))\}.}$$

14. **a.** Pour tout $(x,y)\in V$, on a

$$\nabla^2(H)(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & e^y \end{bmatrix}.$$

Ainsi,

$$\boxed{M_a = \nabla^2\left(H\right)(a, \ln(a)) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{bmatrix}.}$$

b. Nous commençons par remarquer que la matrice M_a est symétrique donc diagonalisable. En outre, elle n'est pas diagonale donc elle ne peut avoir une unique valeur propre, il s'ensuit qu'elle admet deux valeurs propres distinctes : λ_1 et λ_2. Pour montrer les identités demandées le plus rapide serait de recourir aux propriétés de la trace et du déterminant mais ces notions ne sont pas explicitement au programme, nous allons donc les contourner.

On sait que, pour une matrice $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, M est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Soit $x \in \mathbf{R}$, on a alors :

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Sp}(M_a) &\Leftrightarrow M_a - xI_2 \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1-x & -1 \\ -1 & a-x \end{bmatrix} \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow (1-x)(a-x) - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - (a+1)x + (a-1) = 0. \end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme (unitaire) de degré 2 dont on sait par ailleurs que ses deux racines sont λ_1 et λ_2. On a donc

$$(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) = x^2 - (a+1)x + (a-1)$$

c'est-à-dire, en développant le membre de gauche,

$$x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2 = x^2 - (a+1)x + (a-1).$$

En identifiant les coefficients de ces deux polynômes, on obtient

$$\boxed{\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= a+1 \\ \lambda_1\lambda_2 &= a-1. \end{cases}}$$

c. On sait que $0 < a < 1$ donc $\lambda_1\lambda_2 = a - 1 < 0$ et les valeurs propres de $M_a = \nabla^2\left(H\right)(a, \ln(a))$ sont donc de signes opposés. Ainsi,

$$\boxed{H \text{ présente un point col en } (a, \ln(a)).}$$

15. En procédant comme à la question 14, on a

$$M_b = \nabla^2\left(H\right)(b, \ln(b)) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & b \end{bmatrix}$$

de sorte que M_b admet deux valeurs propres distinctes μ_1 et μ_2 satisfaisant :

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 &= b+1 \\ \mu_1\mu_2 &= b-1. \end{cases}$$

Puisque $b > 1$, on a $\mu_1\mu_2 > 0$ donc μ_1 et μ_2 sont toutes deux strictement positives ou toutes deux strictement négatives. Mais puisque $\mu_1 + \mu_2 = b + 1 > 0$, on a nécessairement $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$. Ainsi,

$$\boxed{H \text{ présente un minimum local en } (b, \ln(b)).}$$

Exercice 3

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

1. **a.** Notons, pour tout $i \in \mathbf{N}$, P_i l'événement : « Obtenir pile au i-ème lancer » et $F_i = \overline{P_i}$. On a alors

$$\begin{aligned}
(X=0) &= P_1 \cap P_2 \\
(X=1) &= (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3) \\
(X=2) &= (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4).
\end{aligned}$$

En effet, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(X = n)$ signifie que l'on a obtenu n Face et deux Pile, le second au $(n + 2)$-ème lancer et le premier à l'un des $(n + 1)$ rangs précédents. On obtient donc

$$\boxed{\begin{cases}
\mathbf{P}(X=0) &= \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}, \\[2ex]
\mathbf{P}(X=1) &= 2 \times \dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{27}, \\[2ex]
\mathbf{P}(X=2) &= 3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{27}.
\end{cases}}$$

b. Comme observé à la question précédente, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $(X = n)$ signifie que l'on a obtenu n Face et deux Pile, le second au $(n + 2)$-ème lancer, le premier à l'un des $(n + 1)$ rangs précédents. Formellement :

$$(X=n) = \left[\bigcup_{i=1}^{n+1} \left(P_i \cap \left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} F_j\right)\right)\right] \cap P_{n+2}.$$

Par incompatibilité et par indépendance des lancers, il vient

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X=n) &= \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \times \frac{2}{3} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{4}{3^{n+2}} \\
&= (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(X=n) = (n+1)\frac{4}{3^{n+2}}.}$$

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

2. **a.** U prend clairement des valeurs entières positives et, pour chaque entier n, il existe une suite de tirages amenant à n Face et 2 Pile suivi d'un tirage de la boule numérotée n. Autrement dit,

$$\boxed{U(\Omega) = \mathbf{N}.}$$

b. Soit $n \in \mathbf{N}$. Sachant $(X = n)$, l'urne est composée de $(n + 1)$ boules indiscernables au toucher numérotées de 0 à n donc

$$\boxed{U^{(X=n)} \rightsquigarrow \mathscr{U}(\llbracket 0, n \rrbracket).}$$

c. Soit $k \in \mathbf{N}$. On commence par observer que $(U = k) \cap (X = n) = \emptyset$ si $n < k$ car on ne peut pas tirer une boule numérotée k dans une urne contenant des boules numérotées de 0 à n si $k > n$. Ainsi en appliquant la formule des probabilités totales relativement au système complet d'événements $\{(X = n)\}_{n\in\mathbf{N}}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(U=k\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}\left(U=k, X=n\right) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbf{P}\left(U=k, X=n\right) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbf{P}_{(X=n)}(U=k)\mathbf{P}\left(X=n\right) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\mathbf{P}\left(X=n\right) \quad \text{(d'après } \mathbf{2.b}\text{)},
\end{aligned}$$

ce qui établit la première égalité.
En injectant le résultat trouvé en **1.b**, il vient

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(U=k\right) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \times (n+1)\frac{4}{3^{n+2}} \\
&= 4\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+2}} \\
&= 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n+k+2}} \\
&= \frac{4}{3^{k+2}}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{n}} \\
&= \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{1}{1-1/3} \\
&= \frac{4}{3^{k+2}} \times \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}\left(U=k\right) = \frac{2}{3^{k+1}}.}$$

d. U admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{k\geq 0} k\mathbf{P}\left(U=k\right)$ converge absolument. Les valeurs prises par U étant positives, ceci équivaut à la convergence de la série. Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0} k\mathbf{P}\left(U=k\right) &= \sum_{k\geq 0} k\frac{2}{3^{k+1}} \\
&= \sum_{k\geq 1} k\frac{2}{3^{k+1}} \\
&= \frac{2}{9}\sum_{k\geq 1} k\frac{1}{3^{k-1}} \\
&= \frac{2}{9}\sum_{k\geq 1} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.
\end{aligned}$$

On reconnaît le terme général d'une série géométrique dérivée de raison 1/3. La série converge donc et alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[U] &= \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbf{P}(U=k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{2}{3^{k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{2}{3^{k+1}} \\
&= \frac{2}{9}\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{1}{3^{k-1}} \\
&= \frac{2}{9} \times \frac{1}{(1-1/3)^2} \\
&= \frac{2}{9} \times \frac{9}{4} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{E}[U] = \frac{1}{2}.}$$

Pour déterminer la variance, on commence par étudier l'espérance de $U(U-1)$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0} k(k-1)\mathbf{P}(U=k) &= \sum_{k\geq 2} k(k-1)\frac{2}{3^{k+1}} \\
&= \frac{2}{27}\sum_{k\geq 2} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}.
\end{aligned}$$

On reconnaît une série géométrique dérivée deux fois de raison 1/3, il s'agit donc d'une série convergente, et plus précisément absolument convergente puisque ses termes sont positifs. Il suit donc du théorème de transfert que $U(U-1)$ admet une espérance et

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[U(U-1)] &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\mathbf{P}(U=k) \\
&= \frac{2}{27}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \\
&= \frac{2}{27} \times \frac{2}{(1-1/3)^3} \\
&= \frac{2}{27} \times \frac{2\times 27}{8} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Mais alors $U^2 = U^2 - U + U = U(U-1) + U$ admet une espérance comme somme de variables aléatoires admettant une espérance et

$$\mathbf{E}\left[U^2\right] = \mathbf{E}[U(U-1)] + \mathbf{E}[U] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Il suit alors de la formule de Koenig-Huygens que :

$$\boxed{\mathbf{V}(U) = \mathbf{E}\left[U^2\right] - \mathbf{E}[U]^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.}$$

3. **a.** V prend clairement des valeurs entières positives ou nulles et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un tirage amenant à n Face et deux Pile suivi d'un tirage de la boule 0, auquel cas $(V = n)$ est réalisé. Ainsi,

$$\boxed{V(\Omega) = \mathbf{N}.}$$

b. Soit $n \in \mathbf{N}$. Alors $V^{(X=n)}$ prend ses valeurs entre 0 et n et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{(X=n)}(V = k) &= \mathbf{P}_{(X=n)}(X - U = k)\\ &= \mathbf{P}_{(X=n)}(U = n - k)\\ &= \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{V^{(X=n)} \rightsquigarrow \mathscr{U}([\![0, n]\!]).}$$

c. En reprenant les calculs effectués en **2.b**, on observe que la loi de V est la même que celle de U. Autrement dit,

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}\left(V = k\right) = \frac{2}{3^{k+1}}.}$$

4. Soient $k, l \in \mathbf{N}$. On a

$$(U = k, V = \ell) = (U = k, X - U = \ell) = (U = k, X = k + \ell).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(U = k, V = \ell\right) &= \mathbf{P}\left(U = k, X = k + \ell\right)\\ &= \mathbf{P}_{(X=k+\ell)}(U = k) \times \mathbf{P}\left(X = k + \ell\right)\\ &= \frac{1}{k + \ell + 1} \times (k + \ell + 1)\frac{4}{3^{k+\ell+2}}\\ &= \frac{4}{3^{k+\ell+2}}\\ &= \frac{2}{3^{k+1}} \times \frac{2}{3^{\ell+1}}\\ &= \mathbf{P}\left(U = k\right)\mathbf{P}\left(V = \ell\right).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{U \text{ et } V \text{ sont indépendantes.}}$$

5. U et V étant indépendantes d'après **4**, il vient

$$\boxed{\mathbf{Cov}(U, V) = 0.}$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(X, U) &= \mathbf{Cov}(V + U, U)\\ &= \mathbf{Cov}(V, U) + \mathbf{Cov}(U, U)\\ &= 0 + \mathbf{V}\left(U\right)\\ &= \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{Cov}(X, U) = \frac{3}{4}.}$$

Partie III : Étude d'un jeu

6. Simulation informatique

a. On propose la fonction suivante :

```
function x = simule_X()
    nPile = 0
    nFace = 0
    while (nPile<2)
        if (rand()<2/3)
            nPile = nPile +1
        else
            nFace = nFace +1
        end
    end
    x = nFace
endfunction
```

b. La fonction proposée dans l'énoncé calcule la fréquence, sur 10 000 simulations, des victoires de A.

c. On observe que pour $p \approx 0,8$, on obtient une fréquence de victoires de A approximativement égale à 50%. Ainsi :

$$\boxed{\text{Le jeu est équilibré pour } p \approx 0,8.}$$

7. Étude de la variable aléatoire Y

a. Z compte le rang du premier succès (« obtenir Pile ») dans une suite indéfinie de répétitions d'expériences de Bernoulli indépendantes (lancer la pièce), de même paramètre (p, la probabilité de faire Pile). Ainsi,

$$\boxed{Z \rightsquigarrow \mathscr{G}(p).}$$

b. Y étant le nombre de Face obtenus jusqu'au premier Pile, on a la relation $Y = Z - 1$. Il s'ensuit que Y admet une espérance et une variance et que

$$\boxed{\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[Z-1] = \mathbf{E}[Z] - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}}$$

et

$$\boxed{\mathbf{V}(Y) = \mathbf{V}(Z-1) = \mathbf{V}(Z) = \frac{1-p}{p^2}.}$$

c. Posons $q = 1 - p$. On a, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y \geq n) &= \mathbf{P}(Z - 1 \geq n) \\
&= \mathbf{P}(Z \geq n + 1) \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbf{P}(Z = k) \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} pq^{k-1} \\
&= pq^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^{k-(n+1)} \\
&= pq^n \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \\
&= pq^n \times \frac{1}{1-q} \\
&= q^n.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(Y \geq n) = (1-p)^n.}$$

8. **a.** En appliquant la formule des probabilités totales relativement au système complet d'événements $\{(X = n)\}_{n \in \mathbf{N}}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n, X \leq Y) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n, Y \geq n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)\, \mathbf{P}(Y \geq n) \quad \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes).}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{P}(X \leq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)\, \mathbf{P}(Y \geq n).}$$

b. En injectant les résultats établis en **1.b** et **7.c** dans la formule trouvée en **8.a**, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)\, \mathbf{P}(Y \geq n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{4}{3^{n+2}} q^n \\
&= \frac{4}{9} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{q}{3}\right)^n \\
&= \frac{4}{9} \sum_{n=1}^{+\infty} n \left(\frac{q}{3}\right)^{n-1} \\
&= \frac{4}{9} \times \frac{1}{(1-q/3)^2} \\
&= \frac{4}{9} \times \left(\frac{3}{3-q}\right)^2 \\
&= \frac{4}{(3-q)^2} \\
&= \frac{4}{(2+p)^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{P}(X \leq Y) = \frac{4}{(2+p)^2}.}$$

c. Le jeu est équilibré quand $\mathbf{P}(X \leq Y) = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire quand $\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2}$. Or

$$\begin{aligned}
\frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 8 = (2+p)^2 \\
&\Leftrightarrow p^2 + 4p - 4 = 0 \\
&\Leftrightarrow p \text{ est racine de } X^2 + 4X - 4 \\
&\Leftrightarrow p \in \left\{-2 - 2\sqrt{2},\ -2 + 2\sqrt{2}\right\}.
\end{aligned}$$

Mais $-2 - 2\sqrt{2} < 0$ et $-2 + 2\sqrt{2} > 0$ et p est nécessairement positif. Ainsi,

$$\boxed{\text{Le jeu est équitable pour } p = 2\sqrt{2} - 2.}$$

Remarque : On a $\sqrt{2} \approx 1,41$ donc $2\sqrt{2} - 2 \approx 0,82$, ce qui est cohérent avec la réponse déterminée numériquement à la question **6.c**.