

I Indice de Gini

1. (a) La définition d'une fonction convexe sur J signifie que sur tout segment $[t_1, t_2]$ de J , l'image de tout point du segment $[t_1, t_2]$ est **en dessous de la corde** passant par les points $(t_1, f(t_1))$ et $(t_2, f(t_2))$.
- (b) Lorsque f est une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$, f est convexe sur $[0, 1]$ si et seulement si sa dérivée est croissante sur $[0, 1]$.
2. (a) D'après l'énoncé, \tilde{f} est concave si $-\tilde{f} : t \mapsto f(t) - t$ est convexe.
Montrons que $-\tilde{f}$ est convexe :
 $\forall (t_1, t_2) \in [0, 1]^2, \forall \lambda \in [0, 1],$

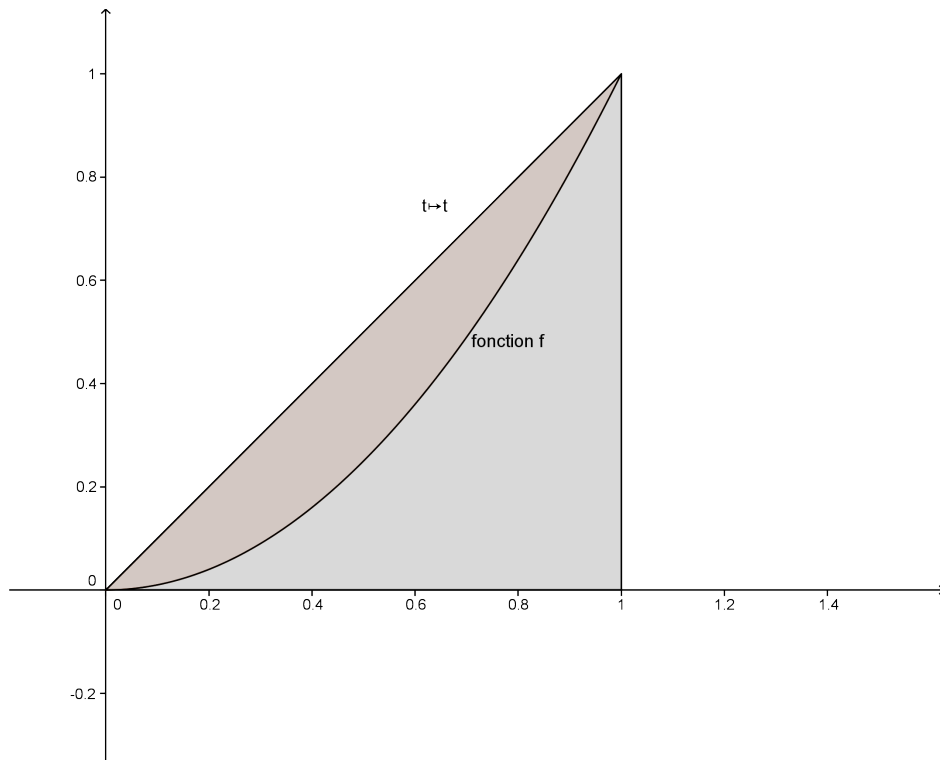
$$\begin{aligned}
 -\tilde{f}(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) &= f(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) - (\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \\
 &\stackrel{\text{car } f \text{ est convexe}}{\leq} \lambda f(t_1) + (1 - \lambda)f(t_2) - \lambda t_1 - (1 - \lambda)t_2 \\
 &= \lambda(f(t_1) - t_1) + (1 - \lambda)(f(t_2) - t_2) \\
 &= \lambda \cdot (-\tilde{f}(t_1)) + (1 - \lambda) \cdot (-\tilde{f}(t_2))
 \end{aligned}$$

Ainsi, $-\tilde{f}$ est bien convexe i.e. \tilde{f} est concave.

- (b) Toutes les fonctions intervenant dans le calcul sont continues sur le segment $[0, 1]$ donc y admettent une intégrale; et par linéarité de l'intégration sur $[0, 1]$:

$$I(f) = 2 \left(\int_0^1 t dt - \int_0^1 f(t) dt \right) = 2 \left(\left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 f(t) dt \right) = 1 - 2 \int_0^1 f(t) dt$$

- (c) On remarque dans le calcul précédent que $\int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \iff 2 = \frac{1}{\int_0^1 t dt}$. Ainsi, $I(f) = 2 \int_0^1 (t - f(t)) dt = \frac{\int_0^1 (t - f(t)) dt}{\int_0^1 t dt}$ est la proportion de l'aire entre la courbe de f et la première bissectrice dans l'aire entre l'axe des abscisses et la première bissectrice sur le segment $[0, 1]$.



3. Un premier exemple.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(t) = t^2$ pour tout $t \in [0, 1]$.

- (a) • $\forall t \in [0, 1], t^2 \in [0, 1]$ donc f est bien définie sur $[0, 1]$, à valeurs dans $[0, 1]$ et en particulier $f(0) = 0^2 = 0$ et $f(1) = 1^2 = 1$.
 • f est de classe C^2 sur $[0, 1]$ comme fonction polynômiale. En particulier, elle est bien continue et de classe C^1 et $f''(t) = 2 \geq 0$ donc f' est croissante. f est bien convexe.
 f est bien un élément de E

(b)
$$I(f) = 1 - 2 \int_0^1 t^2 dt = 1 - 2 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

4. Propriétés de l'indice de Gini.

- (a) Montrons que $\tilde{f} \geq 0$ sur $[0, 1]$:
 Comme l'énoncé donne les valeurs de $f(0)$ et $f(1)$, $\forall t \in [0, 1]$, appliquons l'inégalité de convexité avec $t_1 = 1, t_2 = 0$ et $\lambda = t$:

$$f(t.1 + (1-t).0) \leq t.f(1) + (1-t).f(0) \iff f(t) \leq t \iff t - f(t) \geq 0$$

Ainsi, $\forall t \in [0, 1] \tilde{f}(t) \geq 0$ et par croissance des bornes, $\int_0^1 \tilde{f}(t) dt \geq 0$ donc $I(f) \geq 0$.

- (b) $I(f) = 0 \iff \int_0^1 \tilde{f}(t) dt = 0 \iff \forall t \in [0, 1], \tilde{f}(t) = 0$ car \tilde{f} est continue et positive sur $[0, 1]$.
 Ainsi, $I(f) = 0 \iff \forall t \in [0, 1], f(t) = t$.

- (c) Pour tout f élément de E , f est continue et positive et $f \neq 0$ (car $f(1) = 1$) donc $\int_0^1 f(t) dt > 0$.
 Ainsi, $I(f) = 1 - 2 \int_0^1 f(t) dt < 1$.

- (d) Pour tout entier $n > 0$, on définit f_n sur $[0, 1]$ par $f_n(t) = t^n$.

i.
$$I(f_n) = 1 - 2 \int_0^1 t^n dt = 1 - 2 \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{n+1}.$$

- ii. • *Méthode 1* : La question précédente donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(f_n) = 1$. Donc, par définition de la limite, en posant $\varepsilon = 1 - A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout entier $n \geq N$, $1 - \varepsilon < I(f_n) < 1 + \varepsilon$. Ainsi, en particulier, pour tout $n \geq N$, $I(f_n) > 1 - \varepsilon = A$.
 Donc $f = f_N$ convient.

- *Méthode 2* : Cherchons les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $I(f_n) > A$:

$$I(f_n) > A \iff 1 - \frac{2}{n+1} > A \iff \frac{2}{n+1} < 1 - A \iff \frac{n+1}{2} > \frac{1}{1-A}, \text{ car } 1 - A > 0, \iff n > \frac{2}{1-A} - 1 \iff n \geq \left\lceil \frac{2}{1-A} \right\rceil.$$

En posant $N = \left\lceil \frac{2}{1-A} \right\rceil$, alors $f = f_N$ convient.

5. Minoration de l'indice de Gini

- (a) $f \in E$ donc f est continue sur $[0, 1]$ et $t \mapsto t$ est continue sur $[0, 1]$ donc \tilde{f} est continue sur le segment $[0, 1]$. Or toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes donc il existe t_0 dans $]0, 1[$ tel que $\tilde{f}(t_0) = \max_{t \in [0, 1]} \tilde{f}(t)$.

- (b) On remarque que $t = \frac{t}{t_0}.t_0 = \frac{t}{t_0}.t_0 + (1 - \frac{t}{t_0}).0$. Ainsi, en appliquant l'inégalité de concavité à \tilde{f} avec $t_1 = t_0, t_2 = 0$ et $\lambda = \frac{t}{t_0} \in [0, 1]$ car $t \in [0, t_0]$, on a :

$$\tilde{f}(t) = \tilde{f}\left(\frac{t}{t_0}.t_0 + (1 - \frac{t}{t_0}).0\right) \geq \frac{t}{t_0}.\tilde{f}(t_0) + (1 - \frac{t}{t_0}). \underbrace{\tilde{f}(0)}_{=0-f(0)=0} = \frac{t}{t_0}.\tilde{f}(t_0)$$

- (c) On remarque que $t = \frac{t-1}{t_0-1}.(t_0-1) + 1 = \frac{t-1}{t_0-1}.t_0 - \frac{t-1}{t_0-1} + 1 = \frac{t-1}{t_0-1}.t_0 + 1 - \frac{t-1}{t_0-1}$.
 Ainsi, en appliquant l'inégalité de concavité à \tilde{f} avec $t_1 = t_0, t_2 = 1$ et $\lambda = \frac{t-1}{t_0-1} \in [0, 1]$ car

$t \in [t_0, 1]$ donc $t_0 - 1 \leq t - 1 \leq 0$ donc en multipliant par $\frac{1}{t_0 - 1} < 0$, on a : $1 \geq \frac{t - 1}{t_0 - 1} \geq 0$; on a :

$$\tilde{f}(t) = \tilde{f}\left(\frac{t - 1}{t_0 - 1} \cdot t_0 + \left(1 - \frac{t - 1}{t_0 - 1}\right) \cdot 1\right) \geq \frac{t - 1}{t_0 - 1} \cdot \tilde{f}(t_0) + \left(1 - \frac{t - 1}{t_0 - 1}\right) \cdot \underbrace{\tilde{f}(1)}_{=1 - \tilde{f}(1)=0} = \frac{t - 1}{t_0 - 1} \cdot \tilde{f}(t_0)$$

(d) Ainsi,

$$\begin{aligned} I(f) &= 2 \int_0^1 \tilde{f}(t) dt && \stackrel{\text{Charles}}{=} && 2 \int_0^{t_0} \tilde{f}(t) dt + 2 \int_{t_0}^1 \tilde{f}(t) dt \\ &&& \geq && \text{d'après les questions précédentes} && 2 \int_0^{t_0} \frac{t}{t_0} \cdot \tilde{f}(t_0) dt + 2 \int_{t_0}^1 \frac{t - 1}{t_0 - 1} \cdot \tilde{f}(t_0) dt \\ &&& = && && 2 \cdot \tilde{f}(t_0) \int_0^{t_0} \frac{t}{t_0} dt + 2 \cdot \tilde{f}(t_0) \int_{t_0}^1 \frac{t - 1}{t_0 - 1} dt \\ &&& = && && 2 \cdot \tilde{f}(t_0) \left[\frac{t^2}{2t_0} \right]_0^{t_0} + 2 \cdot \tilde{f}(t_0) \left[\frac{(t - 1)^2}{2(t_0 - 1)} \right]_{t_0}^1 \\ &&& = && && 2 \cdot \tilde{f}(t_0) \frac{t_0}{2} - 2 \cdot \tilde{f}(t_0) \frac{t_0 - 1}{2} \\ &&& = && && \tilde{f}(t_0) \end{aligned}$$

II Le cas à densité

Soit g une densité de probabilité sur \mathbb{R} , nulle sur $]-\infty, 0]$, continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$. On définit une fonction G sur \mathbb{R}_+ par $G(x) = \int_0^x g(v) dv$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Si g représente la densité de population classée suivant son revenu croissant, $G(x)$ représente la proportion de la population dont le revenu est inférieur à x . On suppose de plus que $\int_0^{+\infty} vg(v) dv$ est convergente et on note m sa valeur qui représente donc la richesse moyenne de la population.

6. (a) D'après l'énoncé, la fonction $v \mapsto vg(v)$ est continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues et strictement positives donc $m = \int_0^{+\infty} vg(v) dv > 0$.

(b) $G(x) = \int_{-\infty}^x g(v) dv$ car g est nulle sur \mathbb{R}_- . On reconnaît ainsi la fonction de répartition d'une variable aléatoire admettant g pour densité. Ainsi, d'après le cours :

- G est continue sur $[0, +\infty[$.
- G est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ (car g est continue sur cet intervalle). Elle est en particulier dérivable et $G'(x) = g(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$ donc G est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- $G(0) = \int_0^0 g(v) dv = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 1$ car G est une fonction de répartition.

Ainsi, G réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[G(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)[= [0, 1[$.

(c) G^{-1} est de même variation que G donc strictement croissante sur $[0, 1[$.

7. (a) G est continue sur $[0, +\infty[$ et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. On peut donc poser le changement de variable $u = G(v) \iff v = G^{-1}(u)$:

$$\bullet \text{ bornes : } \begin{aligned} &u : 0 \rightarrow t \\ \iff &v : G^{-1}(0) = 0 \rightarrow G^{-1}(t) \end{aligned}$$

• élément différentiel : $du = G'(v) dv = g(v) dv$.

Donc :

$$\int_0^t G^{-1}(u) du = \int_0^{G^{-1}(t)} vg(v) dv.$$

(b) G^{-1} étant la réciproque de G , on a $\lim_{t \rightarrow 1} G^{-1}(t) = +\infty$.

$$\text{Ainsi, } \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^t G^{-1}(u) du = \lim_{t \rightarrow 1} \int_0^{G^{-1}(t)} vg(v) dv = \int_0^{+\infty} vg(v) dv = m.$$

Donc $\int_0^1 G^{-1}(u) du$ converge et vaut m .

8. Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par : $f(t) = \frac{1}{m} \int_0^t G^{-1}(u)du$ pour tout $t \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$.

(a) i. • Sur $[0, 1[$:

$t \mapsto \int_0^t G^{-1}(u)du$ est l'unique primitive de G^{-1} sur $[0, 1[$ qui s'annule en 0. Ainsi, f est bien continue car dérivable sur $[0, 1[$.

• En 1 :

$$\lim_{t \rightarrow 1} f(t) = \frac{1}{m} \int_0^1 G^{-1}(u)du \stackrel{\text{d'après 7.(b)}}{=} \frac{1}{m} \cdot m = 1f(1).$$

Ainsi, f est continue sur $[0, 1]$.

ii. G^{-1} est continue sur $[0, 1[$ comme bijection réciproque de G , continue sur $[0, +\infty[$ donc $t \mapsto \int_0^t G^{-1}(u)du$ est de classe C^1 sur $[0, 1[$.

f est donc de classe C^1 sur $[0, 1[$ et $f'(t) = \frac{1}{m}G^{-1}(t)$ est strictement croissante sur $[0, 1[$ car G^{-1} est strictement croissante sur $[0, 1[$ et $m > 0$.

Ainsi, f est bien convexe sur $[0, 1[$.

iii. • D'après les questions précédentes, f est bien définie sur $[0, 1]$, elle est continue sur $[0, 1]$ et convexe sur $[0, 1[$ donc convexe sur $[0, 1]$.

• $f'(t) = \frac{1}{m}G^{-1}(t) \geq 0$ sur $[0, 1[$ (car $m > 0$ et G^{-1} est à valeurs dans $[0, +\infty[$) donc f est croissante sur $[0, 1]$.

Ainsi, $f([0, 1]) = [f(0), f(1)] = [0, 1]$: f est bien à valeurs dans $[0, 1]$ et $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

(b) $I(f) = 1 - 2 \int_0^1 f(t)dt$.

Effectuons une I.P.P. sur l'intégrale partielle $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x 1 \cdot f(t)dt$ avec $x \in [0, 1[$:

On pose $v(t) = f(t)$ et $u(t) = t$ fonctions de classe C^1 sur $[0, 1[$ et $v'(t) = \frac{1}{m}G^{-1}(t)$ et $u'(t) = 1$

donc :

$$\int_0^x 1 \cdot f(t)dt = xf(x) - \frac{1}{m} \int_0^x tG^{-1}(t)dt.$$

On pose alors le changement de variable $v = G^{-1}(t) \iff t = G(v)$ dans la dernière intégrale :

$$\int_0^x 1 \cdot f(t)dt = xf(x) - \frac{1}{m} \int_0^{G^{-1}(x)} G(v)vg(v)dv.$$

On passe à la limite lorsque x tend vers 1 :

$$\int_0^1 f(t)dt = \lim_{x \rightarrow 1} \left(xf(x) - \frac{1}{m} \int_0^{G^{-1}(x)} G(v)vg(v)dv \right) = 1 - \frac{1}{m} \int_0^{+\infty} G(v)vg(v)dv.$$

Ainsi,

$$I(f) = 1 - 2 \left(1 - \frac{1}{m} \int_0^{+\infty} G(v)vg(v)dv \right) = -1 + \frac{2}{m} \int_0^{+\infty} vg(v)G(v)dv.$$

9. Soit λ un réel strictement positif. On suppose dans cette question que g est une densité de la loi exponentielle de paramètre λ .

(a) Pour $x > 0$, $G(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

(b) Pour déterminer l'expression de la bijection réciproque de G , pour tout $u \in [0, 1[$, on résout l'équation $G(x) = u$ d'inconnue $x \in [0, +\infty[$:

$$G(x) = u \iff 1 - e^{-\lambda x} = u \iff e^{-\lambda x} = 1 - u \stackrel{\text{car } u < 1}{\iff} \iff_{1-u > 0} -\lambda x = \ln(1-u) \iff x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-u)$$

(c) m est l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ donc, d'après le cours, $m = \frac{1}{\lambda}$.

(d) g vérifie bien les hypothèse de la partie II. Nous pouvons donc appliquer la définition de la question 8. :

$$\text{pour tout } t \in [0, 1[, f(t) = \frac{1}{m} \int_0^t G^{-1}(u)du = \frac{1}{\frac{1}{\lambda}} \int_0^t -\frac{1}{\lambda} \ln(1-u)du = -\lambda \frac{1}{\lambda} \int_0^t -\ln(1-u)du$$

- (e) • *Méthode 1* : $f(t) = \int_0^t -\ln(1-u)du$.
 Effectuons une I.P.P. judicieuse en choisissant $w(u) = 1-u$ comme primitive de $w'(u) = -1$:
 on pose $v(u) = \ln(1-u)$ et $w(u) = 1-u$. v et w sont de classe C^1 sur $[0, 1]$ et $v'(u) = -\frac{1}{1-u}$
 et $w'(u) = -1$:

$$f(t) = \int_0^t -\ln(1-u)du = \int_0^t w'(u)v(u)du = [(1-u)\ln(1-u)]_0^t - \int_0^t -\frac{1}{1-u} \cdot (1-u)du =$$

$$(1-t)\ln(1-t) + \int_0^t 1du = (1-t)\ln(1-t) + t.$$
- *Méthode 2* : on peut vérifier que f est l'unique primitive de $t \mapsto -\ln(1-t)$ qui s'annule en 0 en calculant : $f(0) = 0$ et $f'(t) = -\ln(1-t)$.
- (f) $t \mapsto (1-t)\ln(1-t)$ est continue sur $[0, 1[$ (car $1-t \in]0, 1]$) sur cet intervalle donc l'intégrale est impropre en 1. Calculons l'intégrale partielle :

On effectue une intégration par parties en posant $u(t) = -\frac{(1-t)^2}{2}$ et $v(t) = \ln(1-t)$, fcts de classe C^1 sur $[0, 1[$ de dérivées $u'(t) = (1-t)$ et $v'(t) = -\frac{1}{1-t}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1[, \int_0^x (1-t)\ln(1-t)dt &= \int_0^x u'(t)v(t)dt = \left[-\frac{(1-t)^2}{2} \ln(1-t) \right]_0^x - \int_0^x -\frac{(1-t)^2}{2} \cdot -\frac{1}{1-t} dt \\ &= -\frac{(1-x)^2 \ln(1-x)}{2} - \int_0^x \frac{1-t}{2} dt \\ &= -\frac{(1-x)^2 \ln(1-x)}{2} - \left[-\frac{(1-t)^2}{4} \right]_0^x \\ &= -\frac{(1-x)^2 \ln(1-x)}{2} + \frac{(1-x)^2}{4} - \frac{1}{4} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 1} -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

car en posant $X = 1-x \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$, on a $(1-x)^2 \ln(1-x) = X^2 \ln(X) \rightarrow 0$ par croissance comparée.
 donc :

$$\int_0^1 (1-t)\ln(1-t)dt = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{(g) } I(f) &= 2 \int_0^1 (t-f(t))dt \stackrel{\text{d'après 9.(e)}}{=} 2 \int_0^1 -(1-t)\ln(1-t)dt = -2 \int_0^1 (1-t)\ln(1-t)dt \stackrel{\text{d'après 9.(f)}}{=} \\ &= -2 \cdot -\frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

III Application à une population

10. (a) • Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p_i = \frac{n_i}{N} \geq 0$ car d'après l'énoncé, on a $n_i \geq x_i \in \mathbb{N}^*$ donc $n_i > 0$, et

$$\text{donc } N = \sum_{i=1}^n n_i > 0.$$

$$\bullet \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n n_i = \frac{1}{N} N = 1.$$

Ainsi, la famille $P = (p_i)_{1 \leq i \leq n}$ définit bien une loi de probabilité.

On prouve par un raisonnement similaire que la famille $Q = (q_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $R = (r_i)_{1 \leq i \leq n}$ définissent des lois de probabilité.

- (b) Pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, d'après l'énoncé, on sait que $\varepsilon_i \leq \varepsilon_{i+1} \iff \frac{x_i}{n_i} \leq \frac{x_{i+1}}{n_{i+1}} \iff \frac{q_i}{p_i} =$

$$\frac{N x_i}{X n_i} \leq \frac{N x_{i+1}}{X n_{i+1}} = \frac{q_{i+1}}{p_{i+1}}$$

- (c) On remarque que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{r_i}{p_i} = \frac{N y_i}{Y n_i} = \frac{N n_i - x_i}{Y n_i} = \frac{N}{Y} (1 - \varepsilon_i)$.

Or, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, d'après l'énoncé, $\varepsilon_i \leq \varepsilon_{i+1} \iff 1 - \varepsilon_i \geq 1 - \varepsilon_{i+1} \iff \frac{N}{Y} (1 - \varepsilon_i) \geq$

$$\frac{N}{Y}(1 - \varepsilon_{i+1}) \iff \frac{r_i}{p_i} \geq \frac{r_{i+1}}{p_{i+1}}.$$

$$(d) \text{ Pour } i \text{ appartenant à } \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{p_i - \varepsilon q_i}{1 - \varepsilon} = \frac{\frac{n_i}{N} - \frac{X}{N} \cdot \frac{x_i}{X}}{1 - \frac{X}{N}} = \text{réductions au même dénominateur} = \frac{\frac{n_i - x_i}{N}}{\frac{N - X}{N}} = \frac{n_i - x_i}{N - X} \cdot \frac{N}{N - X} = \frac{n_i - x_i}{N - X} = \frac{y_i}{Y} = r_i$$

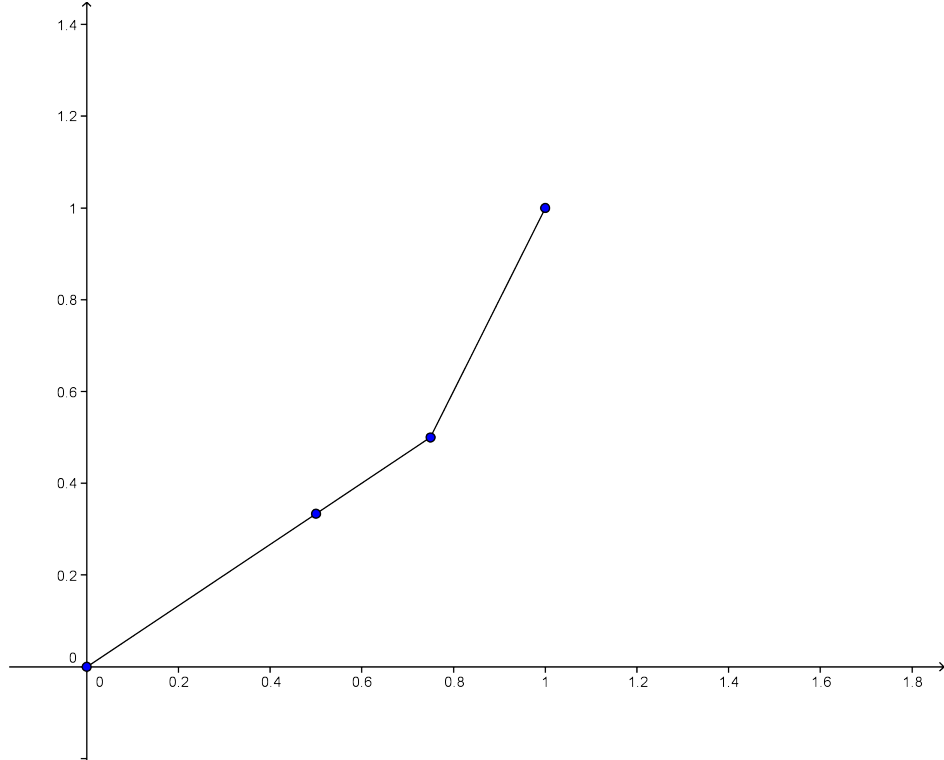
11. Dans un premier temps, nous allons construire une application appartenant à E , qui permet de mesurer les inégalités à l'intérieur de la classe I.

On pose $P_0 = Q_0 = 0$, et pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P_i = \sum_{h=1}^i p_h$ et $Q_i = \sum_{h=1}^i q_h$. On définit alors l'application φ de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que, pour tout entier $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\varphi(P_i) = Q_i$ et pour tout entier $i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, φ est affine sur le segment $[P_i, P_{i+1}]$.

(a) D'après l'énoncé, on a :

- $p_1 = \frac{1}{2}$ et $q_1 = \frac{1}{3}$ donc $(P_1, Q_1) = (p_1, q_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$.
- $p_2 = \frac{1}{4}$ et $q_2 = \frac{1}{6}$ donc $(P_2, Q_2) = (p_1 + p_2, q_1 + q_2) = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$.
- $p_3 = \frac{1}{4}$ et $q_3 = \frac{1}{2}$ donc $(P_3, Q_3) = (p_1 + p_2 + p_3, q_1 + q_2 + q_3) = (1, 1)$.

On place les points de coordonnées $(P_i, Q_i)_{0 \leq i \leq 3}$ et on les relie par des segment, on obtient :



(b) La pente de la droite passant par les points de coordonnées (P_{i-1}, Q_{i-1}) et (P_i, Q_i) est $u_i = \frac{Q_i - Q_{i-1}}{P_i - P_{i-1}} = \frac{\sum_{h=1}^i q_h - \sum_{h=1}^{i-1} q_h}{\sum_{h=1}^i p_h - \sum_{h=1}^{i-1} p_h} = \frac{q_i}{p_i}$ pour i appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket$.

(c) D'après la question précédente, φ est de pente u_{i+1} donc il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(t) = u_{i+1}t + b$. Trouvons la valeur de b :

$$\text{On sait que } \varphi(P_i) = Q_i \iff u_{i+1}P_i + b = Q_i \iff b = Q_i - u_{i+1}P_i.$$

$$\text{Ainsi, } \varphi(t) = u_{i+1}(t - P_i) + Q_i$$

- (d)
- On admet que, la suite $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ des pentes de φ étant croissante (d'après 10.(b)), φ est une fonctions convexe.
 - Pour tout $i \in \llbracket 0, 1n - 1 \rrbracket$, φ est continue sur le segment $[P_i, P_{i+1}]$ en tant que fonction affine donc φ est continue sur $[0, 1]$.

- $\varphi(0) = \varphi(P_0) = Q_0 = 0$ et $\varphi(1) = \varphi(P_n) = Q_n = 1$. de plus, φ est continue et croissante sur $[0, 1]$ (car pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\varphi'(t) = u_{i+1} \leq 0$ sur $]P_i, P_{i+1}[$).

φ appartient bien à E .

- (e) Pour $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned}
\int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t) dt &= \int_{P_i}^{P_{i+1}} u_{i+1}(t - P_i) + Q_i dt = \left[u_{i+1} \frac{(t - P_i)^2}{2} + Q_i t \right]_{P_i}^{P_{i+1}} \\
&= u_{i+1} \frac{(P_{i+1} - P_i)^2}{2} + Q_i (P_{i+1} - P_i) \\
&= \frac{Q_{i+1} - Q_i}{P_{i+1} - P_i} \frac{(P_{i+1} - P_i)^2}{2} + Q_i (P_{i+1} - P_i) \\
&= (P_{i+1} - P_i) \left(\frac{Q_{i+1} - Q_i}{2} + Q_i \right) \\
&= (P_{i+1} - P_i) \left(\frac{Q_{i+1} + Q_i}{2} \right)
\end{aligned}$$

- (f)

$$\begin{aligned}
I(\varphi) &\stackrel{\text{d'après 2.(b)}}{=} 1 - 2 \int_0^1 \varphi(t) dt = 1 - 2 \int_{P_0}^{P_n} \varphi(t) dt \\
&\stackrel{\text{Charles}}{=} 1 - 2 \left(\int_{P_0}^{P_1} \varphi(t) dt + \int_{P_1}^{P_2} \varphi(t) dt + \dots + \int_{P_{n-1}}^{P_n} \varphi(t) dt \right) \\
&= 1 - 2 \sum_{i=0}^{n-1} \int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t) dt \\
&= 1 - 2 \sum_{i=0}^{n-1} (P_{i+1} - P_i) \left(\frac{Q_{i+1} + Q_i}{2} \right).
\end{aligned}$$

12. Nous allons maintenant étudier l'application correspondante pour la classe II. On pose $P_0 = R_0 = 0$ et pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P_i = \sum_{h=1}^i p_h$ et $R_i = \sum_{h=1}^i r_h$. De même, on définit pour i élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$, $\Pi_i = 1 - P_{n-i}$. On considère l'application ψ de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\psi(P_i) = R_i$ et pour tout entier $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, ψ est affine sur le segment $[P_i, P_{i+1}]$.

- (a) La pente de la droite passant par les points de coordonnées (P_{i-1}, R_{i-1}) et (P_i, R_i) est $v_i = \frac{R_i - R_{i-1}}{P_i - P_{i-1}} = \frac{r_i}{p_i}$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- (b) On considère l'application ψ^* définie pour tout $t \in [0, 1]$, par $\psi^*(t) = 1 - \psi(1 - t)$.

i. D'après l'énoncé, on a :

- $p_1 = \frac{1}{2}$ et $r_1 = \frac{2}{3}$ donc $(P_1, R_1) = (p_1, r_1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right)$.
- $p_2 = \frac{1}{4}$ et $r_2 = \frac{1}{6}$ donc $(P_2, R_2) = (p_1 + p_2, r_1 + r_2) = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{6} \right)$.
- $p_3 = \frac{1}{4}$ et $r_3 = \frac{1}{6}$ donc $(P_3, R_3) = (p_1 + p_2 + p_3, r_1 + r_2 + r_3) = (1, 1)$.

Pour tracer ψ , n place les points de coordonnées $(P_i, R_i)_{0 \leq i \leq 3}$ et on les relie par des segment.

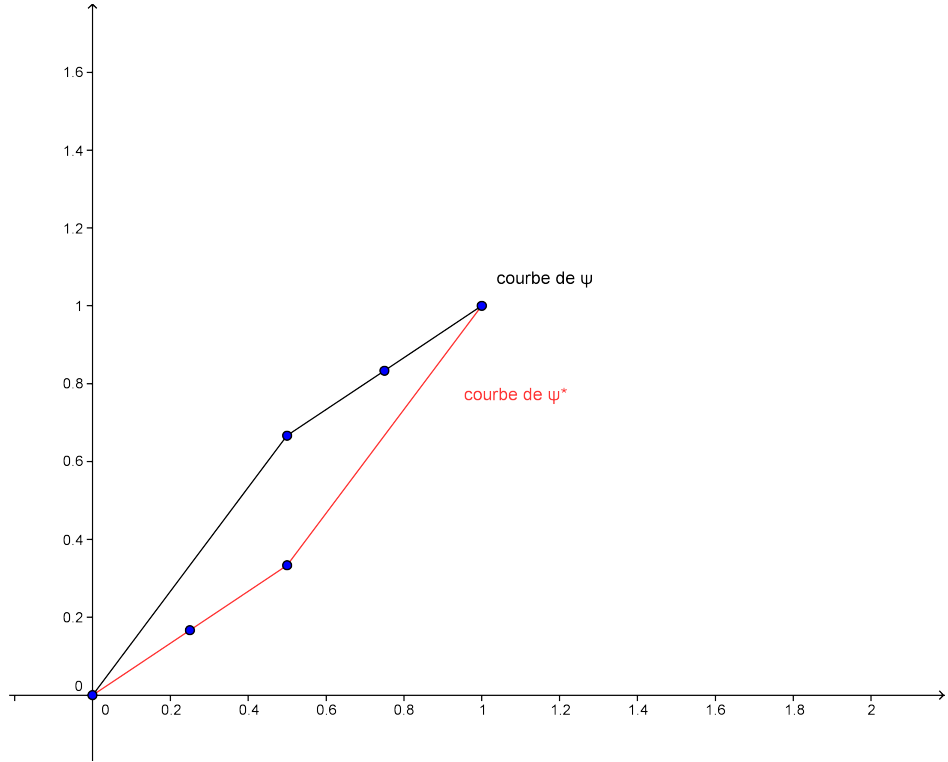
De plus, pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, ψ est affine sur $[P_i, P_{i+1}]$ et vaut $\psi(t) = v_{i+1}(t - P_i) + R_i$, donc ψ^* est affine sur $\{t \in [0, 1] \mid P_i \leq 1 - t \leq P_{i+1}\} = \{t \in [0, 1] \mid 1 - P_{i+1} \leq t \leq 1 - P_i\} = [1 - P_{i+1}; 1 - P_i] = [\Pi_{n-i-1}; \Pi_{n-i}]$ car elle vaut $\psi^*(t) = 1 - v_{i+1}(1 - t - P_i) + R_i$.

En posant le changement d'indice $j = n - i$, ψ^* est donc affine sur les segment $[\Pi_{j-1}; \Pi_j]$, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. De plus,

- $\Pi_0 = 1 - P_3 = 0$ et $\psi^*(\Pi_0) = 1 - \psi(1 - \Pi_0) = 1 - \psi(P_3) = 1 - R_3 = 0$.
- $\Pi_1 = 1 - P_2 = \frac{1}{4}$ et $\psi^*(\Pi_1) = 1 - \psi(1 - \Pi_1) = 1 - \psi(P_2) = 1 - R_2 = \frac{1}{6}$.
- $\Pi_2 = 1 - P_1 = \frac{1}{2}$ et $\psi^*(\Pi_2) = 1 - \psi(1 - \Pi_2) = 1 - \psi(P_1) = 1 - R_1 = \frac{1}{3}$.

- $\Pi_3 = 1 - P_0 = 1$ et $\psi^*(\Pi_3) = 1 - \psi(1 - \Pi_3) = 1 - \psi(P_0) = 1 - R_0 = 1$.

Pour tracer ψ^* , on place les points de coordonnées $(\Pi_i, \psi^*(\Pi_i))_{0 \leq i \leq 3}$ et on les relie par des segments.



- ii. On admet que ψ étant continue et la suite (v_i) de ses pentes étant décroissante (d'après 10.(c)), la fonction ψ est concave.

Montrons alors que ψ^* est convexe :

$$\forall (t_1, t_2) \in J^2, \forall \lambda \in [0, 1],$$

$$\begin{aligned} \psi^*(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) &= 1 - \psi(1 - (\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2)) \\ &= 1 - \psi(\lambda + 1 - \lambda - \lambda t_1 - (1 - \lambda)t_2) \\ &= 1 - \psi(\lambda + 1 - \lambda - \lambda t_1 - (1 - \lambda)t_2) \\ &= 1 - \underbrace{\psi(\lambda(1 - t_1) + (1 - \lambda)(1 - t_2))}_{\geq \lambda\psi(1 - t_1) + (1 - \lambda)\psi(1 - t_2) \text{ car } \psi \text{ est concave}} \\ &\leq 1 - (\lambda\psi(1 - t_1) + (1 - \lambda)\psi(1 - t_2)) \\ &= \lambda + (1 - \lambda) - \lambda\psi(1 - t_1) - (1 - \lambda)\psi(1 - t_2) \\ &= \lambda(1 - \psi(1 - t_1)) + (1 - \lambda)(1 - \psi(1 - t_2)) \end{aligned}$$

- iii. cf question 12.(b)i.

- iv. On a pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\psi^*(\Pi_i) = 1 - \psi(1 - \Pi_i) = 1 - \psi(P_{n-1}) = 1 - R_{n-i}$.

$$\text{La pente de } \psi^* \text{ sur } [\Pi_{i-1}, \Pi_i] \text{ est donc } \frac{1 - R_{n-i} - (1 - R_{n-(i-1)})}{\Pi_i - \Pi_{i-1}} = \frac{R_{n-i+1} - R_{n-i}}{1 - P_{n-i} - (1 - P_{n-(i-1)})} =$$

$$\frac{R_{n-i+1} - R_{n-i}}{P_{n-i+1} - P_{n-i}} = \frac{r_{n-i+1}}{p_{n-i+1}} = v_{n-i+1}$$

13. (a) Si $\varphi = \psi^*$ alors elle ont mêmes pentes donc , pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_i = v_{n-i+1}$.

Or,

$$\bullet \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \frac{\frac{x_i}{n_i}}{\frac{X}{N}} = \frac{\frac{x_i}{N}}{\frac{n_i}{N}} = \frac{q_i}{p_i} = u_i .$$

$$\bullet \frac{1 - \varepsilon_{n-i+1}}{1 - \varepsilon} = \frac{1 - \frac{x_{n-i+1}}{n_{n-i+1}}}{1 - \frac{X}{N}} = \frac{\frac{n_{n-i+1} - x_{n-i+1}}{n_{n-i+1}}}{\frac{N - X}{N}} = \frac{\frac{y_{n-i+1}}{n_{n-i+1}}}{\frac{Y}{N}} = \frac{\frac{y_{n-i+1}}{N}}{\frac{n_{n-i+1}}{N}} = \frac{r_{n-i+1}}{p_{n-i+1}} = v_{n-i+1}$$

Ainsi, par égalité des pentes,

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \frac{1 - \varepsilon_{n-i+1}}{1 - \varepsilon} .$$

- (b)

-
- (c) Nous avons montré aux 2 questions précédentes
$$\begin{cases} \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon_{n-i+1}}{1-\varepsilon} = \frac{1}{1-\varepsilon} \\ \varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1} = 2\varepsilon \end{cases}$$
 En effectuant le pivot $L_2 < -(1-\varepsilon)L_1 - L_2$, on obtient :

$$\varepsilon_i(1-2\varepsilon) = \varepsilon(1-2\varepsilon)$$

- (d) On suppose que $\varepsilon \neq \frac{1}{2}$, alors $1-2\varepsilon \neq 0$. On divise l'égalité précédente par $1-2\varepsilon$, on obtient :
pour tout i appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket$, $\varepsilon_i = \varepsilon$.
Si φ est égale à son adjointe, alors le pourcentage de femmes (ou plus généralement de personnes de classe I.) est le même dans toutes les catégories socio-professionnelles. Il n'y a donc aucune inégalité sociale entre les femmes (personnes de classe I.) et les hommes (personnes de classe II.) .