Maths hec voie E 2018 : corrigé

Proposé par Martin Canu : martin.canu@wanadoo.fr

Exercice

1) Soit M la matrice définie par : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a: M est triangulaire, le spectre se lit donc sur la diagonale de M : $\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{0\}}$.
Si M était diagonalisable, M serait semblable à la matrice nulle, donc M serait nulle. Ce n'est pas le cas.
$\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable}}$

b: En regardant les colonnes de M (deux vecteurs nuls, deux vecteurs indépendants, car non colinéaires), on peut affirmer : $\boxed{\mathrm{rg}(M) = 2}$.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De façon immédiate : $\boxed{\mathrm{rg}(M^2) = 1}$.

c: Par un calcul immédiat, $M^3 = 0_4$. Le polynôme $P(x) = x^3$ est un polynôme annulateur de M. Tout polynôme du type $\lambda P (\lambda \in \mathbf{R}^*)$ également.
Y en a-t-il d'autres?

$$M^3 + aM^2 + bM + cI = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & b & a \\ 0 & 0 & c & b \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$M^3 + aM^2 + bM + cI = 0_4 \Longleftrightarrow a = b = c = 0$
Donc les polynômes déjà cités sont bien les seuls polynômes annulateurs de M.

2) **a:** $f^0 = Id_{\mathbf{R}^n}$ donc $\boxed{r_0 = n}$. $f^n = 0_{\mathscr{L}(\mathbf{R}^n)}$ donc $\boxed{r_n = 0}$.

b: Soit $j \in [\![0, n-1]\!]$.

i. Montrons que $Im(g_j) = Im(f^{j+1})$
• Si $u \in Im(g_j), \exists v \in F_j$ tel que $f(v) = u$ donc $\exists w \in \mathbf{R}^n$ tel que $f^j(w) = v$ et $f(v) = u$.
Donc $\exists w \in \mathbf{R}^n$ tel que $f^{j+1}(w) = u$ $\quad Im(g_j) \subset Im(f^{j+1})$
• Si $u \in Im(f^{j+1}), \exists w \in \mathbf{R}^n$ tel que $f^{j+1}(w) = u$ donc $f\left(f^j(w)\right) = u$.
En posant $v = f^j(w)$, $v \in Im(f^j$ et $f(v) = g_j(v) = u$ donc $u \in Im(g_j)$ et $Im(f^{j+1}) \subset Im(g_j)$
On a bien égalité, donc $\boxed{rg(g_j) = r_{j+1}}$

ii. La formule du rang donne : $\dim(Im(g_j)) + \dim(\ker(g_j)) = \dim(F_j) = r_j$
Or $\ker(g_j) = \{u \in F_j;\ g_j(u) = 0_{\mathbf{R}^n}\} = \{u \in F_j; f(u) = 0_{\mathbf{R}^n}\} = \ker(f) \cap F_j$
Cela donne bien la relation annoncée car $\dim(Im(g_j)) = r_{j+1}$.

c: • $r_0 - r_1 = \dim(\ker(f) \cap R^n) = \dim(\ker(f)) \leqslant n$ (1)
• $r_{n-1} - r_n = \dim(\ker(f) \cap F_{n-1}) \geqslant 0$ (2)
• Soit $j \geqslant 1$. Comparons F_j et F_{j-1}. $F_{j-1} = f^{j-1}(\mathbf{R}^n)$, $F_j = f^j(\mathbf{R}^n) = f^{j-1}\left(f(\mathbf{R}^n)\right) \subset f^{j-1}(\mathbf{R}^n)$.
Donc $F_j \subset F_{j-1}$, donc $\ker(f) \cap F_j \subset \ker(f) \cap F_{j-1}$.
En passant aux dimensions : $\dim\left(\ker(f) \cap F_j\right) \leqslant \dim\left(\ker(f) \cap F_{j-1}\right)$ et $r_j - r_{j+1} \leqslant r_{j-1} - r_j$ (3)
(2), (3) et (1) donne le résultat cherché.

3) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose : $x_i = Card\left(\{j \in [\![0, n-1]\!];\ r_j - r_{j+1} = i\}\right)$ $(*)$

a: Avec ces notations, $\sum_{i=0}^{n} i x_i = \sum_{i=0}^{n-1} (r_i - r_{i+1}) = r_0 - r_n = n$
On a bien $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ élément de $P(n)$.
Remarque : on comprend mieux ce résultat en regardant l'exemple qui suit.

b: Dans cette question, on suppose que n est égal à 4.

i. f est l'endomorphisme de matrice M dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$.
On a donc $r_0 = 4$, $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, $r_3 = 0$ et $r_4 = 0$
Ainsi $r_0 - r_1 = 2$, $r_1 - r_2 = 1$, $r_2 - r_3 = 1$, $r_3 - r_4 = 0$ donc $\boxed{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 1, 0, 0)}$

ii. On veut des entiers naturels (x_i) tels que $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4$.
Envisageons méthodiquement toutes les solutions possibles en prenant toutes les valeurs possibles de x_4, puis de x_3, ...
Solutions : $u_1 = (0, 0, 0, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1, 0)$, $u_3 = (0, 2, 0, 0)$, $u_4 = (2, 1, 0, 0)$ et $u_5 = (4, 0, 0, 0)$.
On a bien 5 solutions et $p(4) = 5$.

iii. • On a déjà une réponse pour u_4 : l'endomorphisme f étudié à la question 1.
• Pour u_1, l'endomorphisme nul est solution :
Ici $r_0 = 4$, $r_1 = 0$,$r_2 = 0$, $r_3 = 0$, $r_4 = 0$ et donc $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ et $x_4 = 4$.

• Pour u_5, considérons f_5 de matrice $M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Ici $r_0 = 4$, $r_1 = 3$, $r_2 = 2$, $r_3 = 1$ et $r_4 = 0$ et donc $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ et $x_4 = 0$.

• Pour u_3, on prend f_3 de matrice $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Ici $r_0 = 4$, $r_1 = 2$, $r_2 = 0$, $r_3 = 0$ et $r_4 = 0$ donc $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$ et $x_4 = 0$.

• Pour u_2, on prend f_2 de matrice $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Ici $r_0 = 4$, $r_1 = 1$, $r_2 = 0$, $r_3 = 0$ et $r_4 = 0$ donc $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ et $x_4 = 0$.

4) a: Soit $k \in \mathbf{N}^*$.

i. $Q(1, k) = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in P(k);\ x_1 + x_2 + \dots + x_k \leqslant 1\}$.
On a donc $x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k = k$ (1) et $x_1 + x_2 + \dots + x_k \leqslant 1$ (2)
L'inégalité (2) impose que seul un des x_j est non nul et vaut 1. L'égalité (2) impose que cet entier soit x_k.
$\boxed{Q(1, k) = \{0, 0, \dots, 0, 1)}$ Donc $\forall k \in \mathbf{N}^*$ $q(1, k) = 1$.

ii. Pour tout entier $\ell \geqslant k$, si $x_1 + 2x_2 + \dots kx_k = k$, alors $x_1 + x_2 + \dots + x_k \leqslant x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k = k \leqslant \ell$.
Donc $Q(\ell, k) = P(k)$.

b: ***Voilà un question délicate.***
Notons $E_1 = Q(\ell, k - \ell)$ et $E_2 = Card(\{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in P(k);\ x_1 + x_2 + \dots + x_k = \ell\})$. Le but du jeu est d'établir une bijection de E_1 dans E_2.

$$(x_1, \dots, x_k) \in E_2 \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k & = k \quad (1) \\ x_1 + x_2 + \dots + x_k & = \ell \quad (2) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_2 + 2x_3 + \dots + (k-\ell)x_{k-\ell+1} + (k-\ell+1)x_{k-\ell+2} + \dots + (k-1)x_k & = k - \ell \quad (1') = (1) - (2) \\ x_1 + x_2 + \dots + x_k & = \ell \quad (2) \end{cases}$$

Dans l'équation (1'), on a $x_i = 0$ pour $i \geqslant k - \ell + 2$, sinon la somme dépasserait $k - \ell$.
Donc, en posant $x'_i = x_{i+1}$
$$\begin{cases} x'_1 + 2x_2 + \dots + (k-\ell)x'_{k-\ell} & = k - \ell \\ x'_1 + x'_2 + \dots + x'_{k-\ell} & = \ell - x_1 \end{cases}$$
Lorsque x_1 décrit $[[0, \ell]]$, on obtient l'ensemble E_1, autrement dit, E_1 et E_2 sont mis en bijection par l'application qui à $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in E_2$ associe $(x'_1, x'_2, \dots, x'_{k-\ell}) \in E_1$.
Donc $Card(E_1) = Card(E_2)$ **c.q.f.d.**

c: Soit ℓ un entier supérieur ou égal à 2.

i. $Q(\ell, k) = A_k \cup A'_k$ avec $A_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in P(k);\ x_1 + x_2 + \dots + x_k = \ell$ et
$A'_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \in P(k);\ x_1 + x_2 + \dots + x_k \leqslant \ell - 1\}$

La réunion est disjointe, donc $\quad Card(Q(\ell,k) = Card(A_k) + Card(A'_k)$
Or $Card(A'k) = q(\ell-1,k)$ par définition, et $Card(A_k) = q(\ell, k-\ell)$ d'après la question précédente.
On a bien le relation annoncée : $\quad q(\ell,k) = q(\ell-1,k) + q(\ell,k-\ell)$.

ii. $q(\ell,\ell) - q(\ell-1,\ell)$ est le cardinal de l'ensemble $B_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_\ell) \in P(\ell);\ x_1 + x_2 + \ldots + x_\ell = \ell\}$
Les éléments de B_k vérifient : $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \ldots + \ell x_\ell &= \ell \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_\ell &= \ell \end{cases}$
Donc $x_2 + 2x_3 + \ldots + (\ell-1)x_\ell = 0$.
Donc $x_2 = x_3 = \ldots = x_\ell = 0 \quad$ et $x_1 = \ell$.
Ainsi $\quad B_k = \{(\ell, 0, \dots, 0)\} \quad Card(B_k) = 1 \qquad \boxed{q(\ell,\ell) - q(\ell-1,\ell) = 1}$

5) **a:** Dans le premier trou, on met `q(L,K=q(L-1,K)` car $q(L,K) = p(k)$, comme $q(L-1,K)$.
Dans le deuxième trou, on met la relation que l'on vient de justifier.

```
function q=qmatrix(n)
   q=ones(n,n)
   for L=2:n
       for K=2:n
          if (K<L) then q(L,K)= q(L-1,K);
               else if (K==L) then q(L,K)=Q(L-1,L)+1;
                   else q(L,K)=q(L-1,K)+q(L,K-L);end;
           end;
       end;
    end;
endfunction
```

b: On trouve $P(n)$ en ligne n et en colonne n du tableau :

```
n=input('n=')
T=qmatrix(n)
disp(T(n,n))
```

c: En regardant la ligne 2 le tableau obtenu, on obtient : $1,2,2,3,3,4,4,5,5$
Il semblerait que $q(2,k) = \left\lfloor \dfrac{k+2}{2} \right\rfloor \qquad (H_k)$
Démontrons (H_k) par une récurrence généralisée pour $k \in \mathbf{N}^*$.
• Pour $k=1$, $Q(2,1) = \{(x_1 \in P(1); x_1 \leqslant 2\} = \{1\} \qquad$ donc $q(2,1) = 1$.
$\left\lfloor \dfrac{1+2}{2} \right\rfloor = 1 \qquad$ Donc (H_1) est vrai.
• Pour $k=2$, $Q(2,2) = P(2)$. C'est l'ensemble des couples d'entiers (x_1, x_2) de $\mathbf{N}^*$ vérifiant $x_1 + 2x_2 = 2$
Les couples sont donc $(0,1)$ et $(2,0)$, donc $q(2,2) = 2$.
$\left\lfloor \dfrac{2+2}{2} \right\rfloor = 2. \qquad$ Donc (H_2) est vrai.
• Soit $k \geqslant 2$. Supposons (H_i) vrai pour $i \in [\![1,k]\!]$
$q(2,k+1) = q(1,k+1) + q(2,k+1-2) = 1 + q(2,k-1) = 1 + \left\lfloor \dfrac{k+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor 1 + \dfrac{k+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \dfrac{k+3}{2} \right\rfloor$
Donc (H_{k+1}) est vrai.
La récurrence est assurée. $\qquad \boxed{\forall k \in \mathbf{N}^* \qquad q(2,k) = \left\lfloor \dfrac{k+2}{2} \right\rfloor}$

Problème

Partie I. Valeurs possibles du coefficient de corrélation linéaire dans divers schémas de Bernoulli

1) **a:** Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

i. Si les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, $Cov(X_k, X_\ell) = 0$ donc $r = 0$ et
$V(S_n) = V\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k)\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = np(1-p)$
On reconnaît le modèle de la loi binomiale : $\qquad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$

ii. Si les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont toutes égales à X_1, $r = \rho(X_k, X_\ell) = \rho(X_1, X_1) = 1$.

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = nX_1. \quad V(S_n) = n^2 V(X_1) = n^2 p(1-p)\ S_n(\Omega) = \{0, n\} \qquad P(S_n = n) = p, P(S_n = 0) = 1-p$$

b: Soit $k \in [[1, n]]$. Le cours donne la formule générale suivante :
$V(S_k) = \sum_{i=1}^{k} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} Cov(X_i, X_j)$.
Pour $i \neq j$, $Cov(X_i, X_j) = r\sqrt{V(X_i)V(X_k)} = r\sqrt{p^2(1-p^2)} = rp(1-p)$ (indépendant de i et j)
Il y a $\binom{k}{2}$ termes de ce type dans la double somme $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k}$
Donc $V(S_k) = k \times p(1-p) + 2\binom{k}{2} \times rp(1-p) = kp(1-p) + 2\frac{k(k-1)}{2} rp(1-p) = kp(1-p)\,[1 + r(k-1)]$
C'est le résultat attendu.

c: En prenant $k = n$, on a $V(S_n) = np(1-p)\,[1 + r(n-1)]$
Une variance est toujours positive donc $1 + r(n-1) \geqslant 0$. Donc $r \geqslant -\frac{1}{n-1}$.

2) On suppose dans cette question que n est au moins égal à 2. On peut dresser le tableau de la loi du couple (X_1, X_2). Elle est du type.

$X_2 \backslash X_1$	0	1	loi de X_2
0	γ	β	$1-p$
1	β	α	p
loi de X_1	$1-p$	p	

a: On a $E(X_1X_2) = \alpha$ donc $Cov(X_1, X_2) = \alpha - E(X_1)E(X_2) = \alpha - p^2$
$r = \frac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{p^2(1-p^2}} = \frac{\alpha - p^2}{p(1-p)}$

$$\begin{aligned} r = -1 &\iff \alpha - p^2 = -p(1-p) \\ &\iff \alpha = p^2 - p(1-p) = 2p^2 - p = p(2p-1) \end{aligned}$$

C'est le résultat attendu.

b: $P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = \gamma$.
On sait que $\alpha + \beta = p$ donc $\beta = p - \alpha = p - p(2p-1) = p(1 - 2p + 1) = 2p(1-p$
Puis $\gamma + \beta = 1 - p$ donc $\gamma = 1 - p - \beta = (1-p)(1-2p)$ $\boxed{P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = (1-p)(1-2p)}$

c: On suppose $r = -1$.
D'après 1) b, $V(X_1 + X_2) = 2p(1-p)(1 + (2-1)r) = 2p(1-p)(1+r) = 0$, car $r = -1$
Donc $X_1 + X_2$ égale une constante de façon presque certaine. Comme $p \in]0, 1[$, la constante ne peut être ni 0, ni 2.
Donc $P(X_1 + X_2 = 1) = 1$
Or $P(X_1 + X_2 = 1) = 2\beta$ donc $\beta = \frac{1}{2}$
$P(X_1 + X_2) = \gamma = 0$ donc $(1-p)(1-2p) = 0$ donc $p = \frac{1}{2}$.
On a donc bien $p = \frac{1}{2}$ et $P([X_1 + X_2 = 1]) = 1$.

3) On suppose dans cette question que n est supérieur ou égal à 3 et que $P\left(\left[\sum_{k=1}^{n} X_k = 1\right]\right) = 1$.

a: On a donc $\sum_{k=1}^{n} X_k = 1$ de façon presque certaine.
Donc $V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = 0 = np(1-p)[1 + (n-1)r]$
Donc $r(n-1) + 1 = 0$ et ainsi $\boxed{r = -\frac{1}{n-1}}$
$E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k)\right) = 1 = np$ donc $\boxed{p = \frac{1}{n}}$.

b: Comme $\sum_{k=1}^{n} X_k = 1$ de façon presque certaine, seul un des X_k peut être égal à 1. Les n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$ pour lesquels la probabilité $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\right)$ est strictement positive sont donc : $(1,0,\dots,0), (0,1,0\dots,0), \dots, (0,0,\dots,1)$.
Tous ces n-uplets ont une même probabilité u non nulle. La somme de ces probas donne 1 donc $nu = 1$ donc $u = \frac{1}{n}$.
On remarque, heureusement, que ces résultats sont cohérents avec les résultats du cas $n = 2$ traité précédemment.

Partie II. Lois bêtas-binomiales

4) Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

a: Soit $h : t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$. h est continue sur $I = \left]0, \frac{1}{2}\right]$, donc l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\, dt$ est impropre pour la borne 0.
h est positive sur I, et au voisinage de 0, $h(t) \sim t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$
$\int_0^{1/2} \frac{1}{t^{1-x}}\, dt$ converge si et seulement si $1 - x < 1$, c'est à dire $x > 0$. Nous obtenons le résultat par le critère de l'équivalent des intégrales de fonctions positives.

b: Nous utilisons le changement de variable $u = 1 - t$ sur l'intégrale $J(\varepsilon) = \int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt$

$J(\varepsilon) = \int_{u=1/2}^{u=\varepsilon} (1-u)^{x-1} u^{y-1}\, (-du) = \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} u^{y-1}(1-u)^{x-1}\, du.$ C'est le résultat demandé.

c: D'après a :, $J(\varepsilon)$ admet une limite finie quand ε tend vers 0 si et seulement si $y > 0$.
Donc $\int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt \quad CV \iff y > 0$
Comme $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt = \int_0^{1/2} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt + \int_{1/2}^{1} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt$, en combinant avec la question a : $\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt \quad CV \iff x > 0$ et $y > 0$.

Dans toute la suite du problème, on pose : $\forall (x, y) \in \left(\boldsymbol{R}^{+*}\right)^2, \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt.$

5) Soit x et y des réels strictement positifs.

a: Soit a et b deux bornes réelles variables vérifiant $0 < a < b < 1$, posons $J(a, b) = \int_a^b t^x(1-t)^{y-1}\, dt$.
Choisissons $u(t) = t^x$ et $v'(t) = (1-t)^{y-1}$, donc $u'(t) = xt^{x-1}$ et $v(t) = -\frac{1}{y}(1-t)^y$
u et v sont C^1 sur $[a, b]$, on peut donc intégrer par parties :
$J(a, b) = \left[t^x \times \left(-\frac{1}{y}\right)(1-t)^y\right]_a^b + \int_a^b xt^{x-1} \times \frac{1}{y}(1-t)^y\, dt = -\frac{1}{y}b^x(1-b)^y + \frac{1}{y}a^x(1-a)^y + \frac{x}{y}\int_a^b t^{x-1}(1-t)^y\, dt$
On fait tendre a et b vers 0 et 1 respectivement (toutes les intégrales convergent d'après ce qui précède).
$B(x+1, y) = \lim_{a\to 0, b\to 1} J(a, b) = \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\, dt = \frac{x}{y}B(x, y+1)$ **c.q.f.d.**

b: $B(x+1, y) + B(x, y+1) = \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\, dt + \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\, dt = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,[t + (1-t)]\, dt$
$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt$ donc $B(x+1, y) + B(x, y+1) = B(x, y)$
En utilisant 5) a :, $\frac{x}{y}B(x, y+1) + B(x, y+1) = B(x, y)$
Ainsi : $\left(\frac{x}{y} + 1\right)B(x, y+1) = B(x, y)$ ou encore $B(x, y+1) = \frac{y}{x+y}B(x, y)$ **c.q.f.d.**

6) On utilise le résultat précédent :

$$\begin{aligned} B(x+k,y+\ell-k) &= \frac{y+\ell-k-1}{x+y+\ell-1}B(x+k,y+\ell-k-1) \\ &= \frac{y+\ell-k-1}{x+y+\ell-1}\times\frac{y+\ell-k-2}{x+y+\ell-2}B(x+k,y+\ell-k-2) \\ &\vdots \\ &= \underbrace{\frac{(y+\ell-k-1)(y+\ell-k-2)\dots y}{(x+y-\ell-1)(x+y-\ell-2)\dots(x+y+k)}}_{=A}B(x+k,y) \end{aligned}$$

On continue en développant $B(x+k,y)$ en utilisant la relation "symétrique" : $B(x+1,y)=\dfrac{x}{x+y}B(x,y)$

$$\begin{aligned} B(x+k,y) &= \frac{x+k-1}{x+y+kl-1}B(x+k-1,y) \\ &\vdots \\ &= \underbrace{\frac{(x+k-1)(x+k-2)\dots x}{(x+y+k-1)(x+y+k-2)\dots(x+y)}}_{=B}B(x,y) \end{aligned}$$

Or, en regardant bien, $A\times B$ est bien l'expression de $\dfrac{(x)^{[k]}(y)^{[l-k]}}{(x+y)^{[\ell]}}$

On a donc bien le résultat.

7) **a:** On y va, haut les cœurs ...

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}p_k &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{B(a+k,b+n-k)}{B(a,b)} \\ &= \frac{1}{B(a,b)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1 t^{a+k-1}(1-t)^{b+n-k-1}\,dt \\ &= \frac{1}{B(a,b)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\right]dt \quad \text{on reconnaît le binôme} \\ &= \frac{1}{B(a,b)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,[(t+(1-t)]^n\,dt \\ &= \frac{1}{B(a,b)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt = \frac{1}{B(a,b)}\times B(a,b)=1 \end{aligned}$$

b: Si $a=1$, $a^{[k]}=k!$. Si $b=1$, $b^{[n-k]}=(n-k)!$ et $(a+b)^{[n]}=2^{[n]}=(2+n-1)2^{[n-1]}=(n+1)\times n\times\dots\times 2^{[0]}=(n+1)!$

Donc $\dfrac{a^{[k]}b^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}=\dfrac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$

$P(S=k)=\dbinom{n}{k}\times\dfrac{k!(n-k)!}{(n+1)!}=\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}\times\dfrac{k!(n-k)!}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n+1}$

Donc $\boxed{S\hookrightarrow\mathscr{U}_{[[0,n]]}}$

c: $E(S)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}kP(S=k)=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}\frac{B(a+k,b+n-k)}{B(a,b)}\,dt$

$E(S)=\dfrac{1}{B(a,b)}\displaystyle\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\left[\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\right]dt$

Dans le crochet, on reconnaît l'expression de l'espérance d'une loi binomiale $\mathscr{B}(n,t)$, qui vaut nt.

$E(S)=\dfrac{1}{B(a,b)}\int_0^1 nt^a(1-t)^{b-1}\,dt=\dfrac{n}{B(a,b)}\times B(a+1,b)=\dfrac{n}{B(a,b)}\times\dfrac{a}{a+b}B(a,b)=\dfrac{na}{a+b}$

On obtient bien le résultat.

On peut remarquer que dans le cas $a=1$ et $b=1$, on obtient $E(S)=\dfrac{n}{2}$, ce qui est cohérent avec le résultat trouvé (loi uniforme sur $[[0,n]]$).

Partie III. Un possible dans le cas où $n = 2$

8) a: Cherchons $P(X_1 = 1)$ en utilisant la formule des probas totales :
$P(X_1 = 1) = P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0)$

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) &= \frac{B(a+2,b)}{B(a,b)} = \frac{a+1}{a+b+1} \times \frac{B(a+1,b)}{B(a,b)} \\ &= \frac{a+1}{a+b+1} \times \frac{a}{a+b} \times \frac{B(a,b)}{B(a,b)} = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) &= \frac{B(a+1,b+1)}{B(a,b)} = \frac{a}{a+b+1} \times \frac{B(a,b+1)}{B(a,b)} \\ &= \frac{a}{a+b+1} \times \frac{b}{a+b} \times \frac{B(a,b)}{B(a,b)} = \frac{ab}{(a+b)(a+b+1)} \end{aligned}$$

Et enfin :

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1) &= \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} + \frac{ab}{(a+b)(a+b+1)} \\ &= \frac{a(a+1+b)}{(a+b)(a+b+1)} = \frac{a}{a+b} \end{aligned}$$

On procède de même pour trouver $P(X_2 = 1)$.

Donc $\boxed{X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{a}{a+b}\right), \text{ de même pour } X_2.}$

b: Posons $S = X_1 + X_2$. $S(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

• $P(S = 2) = P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = \dfrac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} = \dfrac{a^{[2]} b^{[0]}}{(a+b)^{[2]}}$

• $P(S = 0) = P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = \dfrac{1}{B(a+b)} \times B(a, b+2) = \dfrac{1}{B(a,b)} \times \dfrac{b+1}{a+b+1} \times B(a, b+1)$

$P(S = 0) = \dfrac{b(b+1)}{a+b)(a+b+1)} = \dfrac{a^{[0]} b^{[2]}}{[a+b)^{[2]}}$

• $P(S = 1) = P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) = 2\, \dfrac{ab}{(a+b)(a+b+1)} = \dbinom{2}{1} \dfrac{a^{[1]} b^{[1]}}{(a+b)^{[2]}}$

En synthèse, on a bien S qui suit la loi bêta-binomiale $\boldsymbol{B}(2; a, b)$.

c: $P_{[X_1=1]}([X_2 = 1]) = \dfrac{P(X_2 = 1 \cap X_1 = 1)}{P(X_1 = 1)} = \dfrac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} \times \dfrac{a+b}{a}$

On a bien : $P_{[X_1=1]}([X_2 = 1]) \dfrac{a+1}{a+b+1}$.

9) a: Sans problème, la variable u suit la loi uniforme (à densité) sur $[0, a+b]$.
La variable v suit la loi uniforme (à densité) sur $[0, a+b+1]$.

b: Voilà le script complété :

```
function x=randbetabin(a,b)
    x=zeros(1,2);
    u=(a+b)*rand();
    v=(a+b+1)*rand();
          if (u<a) then x(1,1)=1; if v<a+1 then x(1,2)=1;end;
                   else if v <a then x(1,2)=1;end;
          end;
endfunction
```

Expliquons.

• Pour le premier `if` à compléter, on sait que $X_1 = 1$, donc X_2 prend la valeur 1 avec la proba $\dfrac{a+1}{a+b+1}$.

• Pour le deuxième `if`, on sait que $X_1 = 0$. X_2 prend la valeur 1 avec la proba

$P_{(X_1=0)}(X_2 = 1) = \dfrac{P(X_2 = 1 \cap X_1 = 0)}{P(X_1 = 0)} = \dfrac{ab}{(a+b+1)(a+b)} \times \dfrac{a+b}{b} = \dfrac{a}{a+b+1}$

10) **a:** $E(X_1X_2) = P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = \dfrac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}$

$$\begin{aligned} Cov(X_1, X_2) &= E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} - \frac{a^2}{(a+b)^2} \\ &= \frac{a}{a+b}\left(\frac{a+1}{a+b+1} - \frac{a}{a+b}\right) = \frac{a}{a+b}\left(\frac{(a+1)(a+b) - a(a+b+1)}{(a+b+1)(a+b)}\right) \\ &= \frac{a}{a+b}\left(\frac{a^2 + a + ab + b - a^2 - ab - a}{(a+b+1)(a+b)}\right) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)} \end{aligned}$$

Puis $r = \dfrac{Cov(X_1, X_2)}{\sqrt{V(X_1)V(X_2)}} = \dfrac{\dfrac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}}{\dfrac{a}{a+b} \times \dfrac{b}{a+b}} = \dfrac{1}{a+b+1}$

$\boxed{r = \dfrac{1}{a+b+1}}$

b: On cherche a et b pour avoir $r = \dfrac{1}{a+b+1}$ et $p = \dfrac{a}{a+b}$

Donc $a + b + 1 = \dfrac{1}{r}$ puis $a = p(a+b) = a\left(\dfrac{1}{r} - 1\right) = p\,\dfrac{1-r}{r}$

$b = \dfrac{1}{r} - 1 - a = \dfrac{1}{r} - 1 - p\dfrac{1-r}{r} = \dfrac{1 - r - p(1-r)}{r} = \dfrac{(1-r)(1-p)}{r}$ $\boxed{\text{En prenant } a = \dfrac{1-r}{r}p \text{ et } b = \dfrac{1-r}{r}(1-p)}$ avec la fonction `randbetabin`, on obtient bien ce qui est demandé.

FIN