ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

T.P. noté

Mardi 8 Mai

Chaque groupe enregistrera ses programme dans un fichier *TPNOTE-groupeN.sce* où N désigne le numéro du groupe et enverra le fichier en fin de séance à `frederic@gaunard.com`.

On invite les étudiant.e.s à commenter aux maximum leurs programmes.

Exercice 1. (Marche aléatoire) Un individu en état d'ébriété essaye de rentrer chez lui depuis son bar fétiche. On modélise son déplacement par l'évolution de sa position sur un axe gradué de 0 à N où 0 représente la position de la terrasse et N celle de chez lui.

A chaque instant n, l'individu fait un pas en avant ou en arrière avec la même probabilité. S'il retourne au bar, il s'y rassoit et recommande une tournée. S'il arrive chez lui, il se couche et y reste. On note X_n la variable aléatoire correspondant à la position de notre homme après n déplacements. Après 0 déplacements, celui ci est au bar donc

$$X_0 = 0, \quad X_1 = 1.$$

(1) Écrire une fonction `X=position(n,N)` qui renvoie **la suite** des positions après n déplacements.
(2) Écrire un programme permettant de représenter graphiquement la trajectoire de notre homme sur n déplacements où n est rentré par l'utilisateur.
(3) Exécuter le programme précédent plusieurs fois pour $n = 10$ et $N = 8$.
(4) On introduit la v.a. Y correspondant au nombre de déplacements jusqu'à arrivée chez lui mais qui prend la valeur 0 si ce monsieur se réinstalle au bar. Écrire une fonction permettant de simuler Y.
(5) *Bonus.* Représenter le diagramme des fréquences observées pour les valeurs de Y sur 1000 réalisations.

Exercice 2. (Guirlande) Une guirlande électrique est composée de spots nommés de bas en haut S_1, S_2, S_3, S_4 et change d'état de la manière suivante:

- à l'instant $t = 0$, le spot S_1 est allumé;
- si, à l'instant $t = n$ le spot S_1 est allumé, alors un (et un seul) des spots s'allume à l'instant $t = n+1$, et ceci de manière équiprobable;
- si, à l'instant $t = n$ le spot S_k $(2 \leq k \leq 4)$ est allumé, le spot S_{k-1} s'allume à l'instant $t = n + 1$.

On pourra remarquer qu'à chaque instant, un et un seul spot est allumé. On note X la variable aléatoire représentant le premier instant où le spot S_2 s'allume.

(1) Écrire une fonction `y=spot2()` qui simule la variable aléatoire X.

(2) Déterminer de façon théorique la loi de X. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 3. (Poolage sanguin) On étudie une méthode de détection des porteurs d'un parasite au sein d'un ensemble donné de N individus tirés au sort. La probabilité d'être porteur du parasite dans la population est $p \in]0;1[$. Les personnes sont atteintes indépendemment les unes des autres.

On dispose d'un test permettant d'établir de façon certaine qu'un échantillon de sang contient ou non le parasite, le résultat de ce test étant dit positif dans le premier cas et négatif dans le second.

Pour chacun des N individus, on possède un prélèvement sanguin. On envisage alors deux méthodes de détection:

- Première méthode: on teste un à un les N prélèvements, effectuant ainsi N tests.
- Seconde méthode (*poolage*):
  - On fixe un entier naturel non nul ℓ. On suppose que N est un multiple de ℓ et on pose $N = n \times \ell$. On répartit alors les N prélèvements en n groupes $G_1, G_2, \ldots, G_n$, chaque groupe G_i contenant le même nombre ℓ de prélèvements. Pour chacun des groupes G_i, on extrait une quantité de sang de chacun des l prélèvements qu'il contient, puis on mélange ces extraits, obtenant ainsi un échantillon de sang H_i, caractéristique du groupe G_i.
  - On teste alors H_i:
    - si le test de H_i est négatif, aucun des individus au sein du groupe G_i n'est porteur du parasite. Le travail sur le groupe G_i est alors terminé;
    - si le test de H_i est positif, on teste un à un les prélèvements de G_i pour détecter les porteurs du parasite au sein du groupe G_i.

Soient X la variable aléatoire égale au nombre de groupes G_i pour lesquels le test de H_i a été positif et T la variable aléatoire égale au nombre total de tests effectués dans la réalisation de la méthode du poolage.

(1) Écrire une fonction `y=pool(ℓ,p)` simulant le test sur un groupe de taille ℓ (avec probabilité p de contamination de chaque individu). (La fonction renverra 0 ou 1 selon que le test est négatif ou non).

(2) Écrire alors une fonction `[X,T]=poolage_sanguin(N,p,ℓ)` renvoyant le résultat simultané de la simulation de X et T.