ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

T.P. n°4

Polynômes.
Matrices.

1 Polynômes

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est à dire un polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On peut écrire

$$P(X) = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0.$$

Le polynôme P est **entièrement déterminé** par la suite $[a_0, a_1, ..., a_n]$ de ses coefficients. Ainsi, on code le polynôme P par le vecteur-ligne `P` formé de la suite de ses coefficients (listés par ordre croissant des puissances correspondantes):

$$\texttt{P} = [a_0, a_1, ..., a_n].$$

Cette façon de représenter les choses, plutôt intuitive, nécessite une certaine **vigilance**: `P(k)` renvoie le coefficient a_{k-1}.

☞ Quel polynôme rest représenté par `P=[-1, 0, 0, 3, 2]`? Comment représenter le polynôme $Q = 2X^4 - 3X^2 + 1$?

Exercice 1. (Opérations de base)

(1) Quelle fonction de `SciLab` permet d'obtenir le degré d'un polynôme `P`?
(2) Recopier dans `SciNotes` et compléter la fonction `y=evalpoly(P,x)` prenant pour arguments un polynôme `P` et un réel `x` et qui renvoie la valeur du polynôme `P` évalué en `x`

```
function y=evalpoly(P,x)
    y=P(1);
    for k=2:.............
        y=...............
    end
endfunction
```

Exercice 2. (Polynôme dérivé)

Écrire une fonction `derivepoly()` prenant pour argument un polynôme P et renvoyant le polynôme dérivé P'.

Exercice 3. (Division euclidienne - cas particulier)

Écrire un programme qui demande à l'utilisateur de rentrer un polynôme P et un nombre a, effectue la division euclidienne de $P(X)$ par $X - a$:

$$P(X) = (X - a)Q(x) + r, \qquad r \in \mathbb{R},$$

puis affiche le polynôme Q et le nombre r. Améliorer le programme pour qu'il précise si a est racine de P.
⟦indication: On pourra chercher une relation de récurrence entre les coefficients de Q et ceux de P.⟧

Exercice 4. (Polynômes de Legendre)

(1) Soit $n \geq 1$ un entier. Quel est le degré du polynôme $P_n(X) = (X^2-1)^n$? Préciser quels sont les coefficients de ses monômes. En déduire une façon d'implémenter le polynôme P_n sous `SciLab`.

(2) On définit le $n-$ième polynôme L_n de Legendre comme dérivée $n-$ième du polynôme P_n, ce qu'on note $L_n = P_n^{(n)}$.

  (a) Quel est le degré de L_n?

  (b) À l'aide de la Question (1) et de l'Exercice 2, écrire une fonction `Legendre()` prenant pour argument un entier n et renvoyant le polynôme de Legendre L_n.

  (c) Préciser les 4 premiers polynômes de Legendre. Les représenter sur un même graphique sur l'intervalle $[-1;1]$.

2 Matrices

Si n et p sont deux entiers supérieurs ou égaux à 1 et que $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix},$$

on peut définir la matrice A dans `SciLab` par la syntaxe

$$\texttt{A=}[a_{1,1}, ..., a_{1,p}; a_{2,1}, ..., a_{2,p}; ....; a_{n,1}, ..., a_{n,p}].$$

Les coefficients d'une même ligne sont séparés par des virgules et on indique le changement de ligne par un point-virgule.

Si `A` est une matrice déjà définie:

- l'instruction `A(i,j)` renvoie le coefficient à la `i`-ème ligne et `j`-ième colonne.
- l'instruction `size(A)` renvoie le vecteur ligne `[L,C]` où `L` est le nombre de lignes de `A` et `C` le nombre de colonnes. L'instruction `length(A)` renvoie quant à elle le nombre $L \times C$ de ses coefficients.

Les opérations `+` ou `*` permettent de faire des opérations sur les matrices (multiplication par un réel, additions et multiplications de deux matrices lorsque cela a un sens).

Si `A` est une matrice carrée déjà définie et si `k` est un entier (naturel), l'instruction `A^k` permet de calculer les puissances de `A`. Si la matrice est inversible, on peut étendre l'instruction à `k` entier relatif.

L'instruction `eye(n,n)` renvoie la matrice identité de taille `n`; l'instruction `zeros(n,p)` construit une matrice ne contenant que des zéros et `ones(n,p)` une matrice ne contenant que des 1.

Enfin, l'instruction `A'` renvoie transposée de la matrice `A`.

Exercice 5.

(1) Définir dans la console `SciLab` les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(2) Que renvoient les instructions suivantes

```
A+B,   A*B,   A+C,   A*C,   A'*C,   B^2,   B^(-1),   C^(-1) ,   C*C^(-1) - eye(3,3)?
```

(3) Que renvoie `A(3)`? `A(5)`?

(4) Taper l'instruction `A(3,3)=1;` puis `A`. Que s'est-il passé?

(5) Même question si on tape `A(4,5)=-2`.

Exercice 6. Écrire un programme qui demande à l'utilisateur de rentrer un entier strictement positif n et affiche la matrice

$$\left((-1)^{i+j}\right)_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n+1} \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (-1)^{n+1} & (-1)^{n+2} & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(1) Définir les matrices précédentes dans la console `SciLab`.
(2) Calculer $A^2 + A - 2I_3$.
(3) Introduire la matrice $B = \frac{1}{2}(A + I_3)$ puis calculer AB et BA. Ce résultat était-il prévisible?
(4) Taper l'instruction `A^(-1)==B`. Que se passe-t-il?
(5) Vérifier que P est inversible et calculer $Q = P^{-1}$.
(6) Vérifier que $P^{-1}AP$ est diagonale.

Exercice 8. (Polynôme de matrice) Écrire une fonction `polymat()` prenant en argument un polynôme `P` (codé sous forme de vecteur-ligne) et une matrice carrée `A` et renvoyant la matrice `P(A)`.

L'instruction `inv(A)` renvoie également, si la matrice est inversible, l'inverse de `A`. L'instruction `rank(A)` renvoie le **rang** de la matrice, c'est à dire le nombre de pivots non nuls. Si la matrice est carrée et que son rang est égal à son nombre de lignes (ou de colonnes), alors la matrice est inversible.

Exercice 9. Écrire un programme demandant à l'utilisateur de rentrer une matrice carrée, vérifiant que celle-ci est bien carrée puis affichant un message de réponse concernant l'inversibilité de la matrice. Si la matrice est inversible, le programme affichera aussi l'inverse, sinon elle précisera le rang.

Exercice 10. (Résolution de système) On considère le système linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & - & 2y & & & + & t & = & 3 \\ -5x & + & 3y & - & 2z & + & 2t & = & 3 \\ x & - & y & + & z & - & t & = & -2 \\ 4x & - & 10y & + & 7z & - & 4t & = & -11 \end{array}\right. .$$

(1) On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix}$. Introduire une matrice A telle que $AX = B$.
(2) Montrer que le système est de Cramer si et seulement si A est inversible. Comment obtient-on alors X?
(3) Utiliser `SciLab` pour résoudre le système.

La commande `diag()` prend en argument une matrice ligne ou colonne (de longueur n) et créé la matrice diagonale de taille $n \times n$ dont la diagonale est composée des coefficients de la matrice ligne ou colonne en argument. En ajoutant un paramètre `1` ou `-1` en second argument de `diag()`, les coefficients apparaîtront sur la surdiagonale ou sur la sous-diagonale.

Exercice 11.

(1) Taper puis observer ce que font les instructions `diag(2*ones(7,1))` puis `diag(-3*diag(4,1),1)`.

(2) En déduire une suite de commandes permettant de créer la matrice A de taille 8×8 définie par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(3) Écrire une fonction prenant en argument un entier n, trois réels a, b, c et renvoyant la matrice carrée de taille n ci-dessous.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \ddots & & \vdots \\ 0 & c & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix}$$

Si `A` est une matrice de taille $n \times p$ déjà définie, la commande `A(i,:)` renvoit la $i-$ème ligne de `A`, alors que `A(:,j)` renvoit la $j-$ième colonne.

Exercice 12. (Matrices stochastiques)

On dit qu'une matrice est *stochastique* si tous ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1. Écrire un programme `test_stochastique.sce` demandant à l'utilisateur de rentrer une matrice et affichant si la matrice est stochastique ou non.

Exercice 13. (Matrices de Van der monde et interpolation polynomiale)

Soient $x_0, x_1, ..., x_n$ des réels. On appelle matrice de Van der monde associée à (x_i) la matrice

$$V(x_0, ..., x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

(1) Écrire une fonction `vandermonde()` prenant en argument un vecteur-ligne $[x_0, x_1, ..., x_n]$ et renvoyant la matrice de Van der monde associée.

(2) Application: on cherche à résoudre un *problème d'interpolation polynomiale.* C'est à dire que, étant donnés $x_0, x_1, ..., x_n$ des réels deux à deux distincts et $y_0, y_1, ..., y_n$ d'autre réels, on veut trouver un polynôme P de degré $n+1$ tel que

$$\forall i \in [\![0; n]\!], \qquad P(x_i) = y_i.$$

(a) Notant $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ les coefficients du polynôme P, montrer que P solution du problème d'interpolation est équivalent à

$$V(x_0, ..., x_1) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

(b) En déduire l'écriture d'une fonction `interpolation()` prenant en arguments deux vecteurs lignes `x=`$[x_0, x_1, ..., x_n]$ et `y=`$[y_0, y_1, ..., y_n]$ et renvoyant le polynôme solution du problème d'interpolation correspondant.