ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

T.P. n°5

Principe de dichotomie

1 Introduction

On s'intéresse à la résolution d'une équation du type $f(x) = 0$. Lorsqu'on ne peut pas résoudre explicitement, on a vu au cours du Chapitre 9 (*Continuité des fonctions d'une variable réelle*) que le théorème de bijection (ou des valeurs intermédiaires) permettait de garantir l'existence de solutions.

On y a également présenté une méthode itérative, le principe de **dichotomie**, permettant d'obtenir une valeur approchée de la solution.

Cette méthode consiste à réduire, étapes par étapes, la taille de l'intervalle dans lequel se trouve la solution, jusqu'à ce que la taille de celui-ci soit inférieure à la précision souhaitée.

2 Le principe

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle $[a; b]$.

Ainsi, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, on sait qu'il existe au moins une solution à $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a; b]$ mais on ne sait pas où. La méthode de dichotomie consiste à diviser l'intervalle en deux en calculant le milieu

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

Il y a maintenant deux possibilités :

- Ou bien $f(a)$ et $f(c)$ sont de signes contraires et la solution cherchée est donc dans l'intervalle $[a; c]$;
- Ou bien cela se passe entre c et b.

Pour obtenir une valeur approchée de α à ϵ près, on construit donc une suite d'intervalles $[a_n; b_n]$ dont la longueur est divisée par deux à chaque étape et qui contiennent tous α. Quand la longueur de l'intervalle $[a_n; b_n]$ est plus petite que ϵ, on s'arrête et le milieu de l'intervalle fournit alors une valeur approchée de α à ϵ près.

On part du principe que ni a ni b n'est solution de l'équation...

Plus précisément, on construit trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) selon le procédé suivant:

$$\begin{cases} a_0 &= a \\ b_0 &= b \\ c_0 &= \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

Puis, supposant a_n, b_n et c_n construits, on définit les termes successifs de la manière suivante:

- Si $f(a_n)f(c_n) = 0$, alors $\alpha = c_n$;
- Si $f(a_n)f(c_n) < 0$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$;
- Si $f(a_n)f(c_n) > 0$, alors $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

Enfin,
$$c_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}.$$

(1) Que vaut $b_n - a_n$? En déduire que pour toute précision (arbitrairement petite) $\epsilon > 0$, il existe un rang n pour lequel la longueur de l'intervalle contenant α est plus petite que ϵ.

(2) Recopier et compléter la fonction `dichotomie()` ci-dessous prenant en argument une fonction f, les extrémités a et b de l'intervalle de recherche et la précision ϵ et renvoyant une valeur approchée à ϵ près de α:

```
function c=dichotomie(f, a, b, epsilon)
    c=.........................
    while abs(b-a)>=epsilon & f(c)<> 0
        if ......................... then
            b=.....................
        else
            a=.....................
        end
        c=.........................
     end
endfunction
```

(3) Utiliser le programme pour déterminer une valeur approchée à 10^{-4} près de la solution de l'équation
$$x + \ln(x) = 2.$$

3 Variante: principe de dichotomie avec une boucle `for`

On peut vouloir écrire un programme qui ne renvoie pas la solution de l'équation $f(x) = 0$ à ε près (où l'utilisateur a choisi la précision) mais plutôt le résultat du principe de dichotomie après un nombre n (cette fois choisi par l'utilisateur) d'étapes.

Recopier, compléter et décrire ce que fait le programme suivant:

```
function [g,d]=dichotomie_for(f, a,b, n)
    g(1)=..........................
    d(1)=..........................
    for k=1:n
        c=............................
        if f(g((i)))*f(c)<0 then
            g(i+1)=...............
            d(i+1)=...............
        else
            g(i+1)=...............
            d(i+1)=...............
        end
     end
endfunction
```

4 Autres Exercices

Exercice 1. On considère, pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, l'équation

$$(E_n); \qquad x^n - nx + 1 = 0.$$

(1) Montrer que (E_n) admet une unique solution sur $[1; +\infty[$, notée u_n.
(2) Représenter graphiquement et sur un même graphique, les fonction f_3, f_4, f_{10} et f_{50}, où $f_n : x \mapsto x^n - nx + 1$. Établir une conjecture quant au sens de variations de la suite (u_n).
(3) Écrire une fonction `u=suite_implicite(n)` qui calcule et renvoie une approximation de u_n à 10^{-4} près.
(4) Représenter graphiquement les 100 premiers termes de la suite. Qu'observe-t-on?

Exercice 2.

(1) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 4x^2 - 2$. Représenter la courbe de g sur $[-1; 1]$ affichée par `SciLab`.
(2) Combien de solutions l'équation $g(x) = 0$ admet-elle sur $[-1; 1]$? Donner un encadrement, obtenu par lecture graphique, à 10^{-1}, de chacune des solutions.
(3) Qu'affiche `SciLab` si on saisit `dichotomie(g,-1,1,0.1)`?
(4) Écrire une fonction `v=get_zeros()` prenant en argument un entier n, une fonction f, les extrémités a et b d'un intervalle, et la précision ϵ à laquelle on veut que la fonction renvoie les n (plus petites) solutions (sous forme d'un vecteur `v`) de l'équation $f(x) = 0$ comprises dans l'intervalle $[a; b]$.

(5) Utiliser cette fonction pour déterminer toutes les solutions avec la précision 0.001.

Exercice 3. Définir et représenter sur $[0; 3]$ la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \begin{cases} 2e^x - 1, & \text{si } x < 1/2 \\ -2, & \text{si } x \geq 1/2 \end{cases}.$$

Que renvoie `dichotomie(h,0,1,0.05)`? Comment expliquer cela?