



## T.P. n°6

Représentations graphiques des fonctions de deux variables

# 1 Introduction

Considérons une fonction  $f$  définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ . Représenter graphiquement  $f$  dans l'espace signifie représenter la **surface**  $\mathcal{S}_f$  définie par l'ensemble des points  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in U\}$ .

Formellement, représenter  $\mathcal{S}_f$  nécessiterait de calculer  $f(x, y)$  pour tout couple  $(x, y) \in U$ , ce qui pose, sur machine des problèmes; on se contente alors, comme pour les fonctions d'une variable, d'une *représentation approchée* de  $\mathcal{S}_f$ :

☞ On sélectionne un nombre fini de points  $(x, y) \in U$  pour lesquels on va calculer  $f(x, y)$  et SciLab permet alors de relier les points entre eux.

☞ On fera tourner la figure obtenue pour la voir sous "tous les angles" à l'aide de l'icône pivoter, ce qui permet aussi éventuellement de faire des hypothèses sur des éventuels extrema.

# 2 Avec plot3d()

L'utilisation de fonction `plot3d()` rappelle celle de `plot2d()` pour les fonctions d'une variable. Plus précisément,

- On définit notre fonction `z=f(x,y)`;
- On se donne un vecteur `x` de taille `n`;
- On se donne un vecteur `y` de taille `p`;
- On **calcule** la **matrice** `z` de taille `n × p` définie par

$$z(i, j) = f(x(i), y(j))$$

- On termine par l'appel `plot3d(x, y, z)`.

**Exercice 1.** On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}.$$

- (1) Préciser le domaines de définition respectif  $U$  de  $f$ .
- (2) Représenter graphiquement  $\mathcal{S}_f$  sur  $[-4; 4] \times [-4; 4]$ .
- (3) D'après la figure obtenue,  $f$  semble-t-elle présenter des extrema?
- (4) Déterminer, par le calcul, les points critiques de  $f$ . Retrouver l'observation précédente.

**Exercice 2.** (Exemple de point selle: le *Pringles*) Représenter graphiquement la fonction  $f$  sur  $[-3; 3]^3$ , où  $f(x, y) = x^2 - y^2$ . Qu'observe-t-on en  $(0, 0)$ ? Vérifier que c'est un point critique et déterminer les valeurs propres de sa matrice hessienne.

**Exercice 3.** Représenter graphiquement les fonctions suivantes et s'émerveiller du résultat.

(1) Le demi-donut

$$f(x, y) = \sqrt{1 - \left(2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2}$$

(2) Le toboggan

$$f(x, y) = x^2 + \frac{10}{y^2 + 1} :$$

(3) Le grand plongeon

$$f(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1};$$

(4) Le paysage de montagne

$$f(x, y) = 5(x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2};$$

(5) La montagne du Destin

$$f(x, y) = 5\sqrt{x^2 + y^2}e^{-x^2 - y^2}.$$

### 3 Avec fplot3d()

Avec la commande `fplot3d()`, on fournit la valeur du vecteur `x`, du vecteur `y` et de la fonction `f` à tracer. La valeur de la matrice `z` est alors automatiquement calculée.

**Exercice 4.** Compléter la suite d'instructions suivantes afin de représenter graphiquement la fonction  $f : (x, y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$  sur  $[-3; 3] \times [-5; 5]$ .

```
function z=f(x,y)
    z=.....
endfunction

x=linspace(-3, 3, 100) //on rappellera comment fonctionne linspace
y=linspace(-5, 5, 100)
fplot3d(.....)
```

### 4 Lignes de niveau

Si  $a \in \mathbb{R}$ , on appelle **ligne de niveau**  $a$  de  $f$  l'ensemble des points  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  vérifiant  $f(x, y) = a$ . Ainsi, une ligne de niveau est l'intersection de  $\mathcal{S}_f$  et du plan d'équation  $z = a$ .

☞ Si vous avez déjà fait de la randonnée, vous connaissez cette représentation à travers les cartes, afin de représenter, en deux dimensions, l'altitude.

Soit  $v$  la liste des niveau qui nous intéressent. L'instruction `contour(x,y,f,v)` construit les lignes de niveau de  $f$  correspondant aux niveaux contenus dans le vecteur  $v$ .

**Exercice 5.** Reprendre la fonction  $f$  de l'exercice précédent et tracer les lignes de niveaux  $f(x, y) = k$  pour  $k$  entier avec  $k = 10j$ ,  $j = 0, 1, \dots, 20$ .

**Exercice 6.** On considère la fonction  $f$  définie sur l'ouvert  $U = ]0; 1[ \times ]0; 1[$  par

$$f(x, y) = xy(2 - x - y).$$

- (1) Tracer le graphe de  $f$  à l'aide de la fonction `fplot3d()` sur  $U$  (on choisira un pas de 0.05). Conjecturer l'existence d'extrema locaux et/ou globaux de  $f$ .
- (2) Sur une autre figure, tracer les lignes de niveau de la fonction  $f$  autour du point critique conjecturé. Les résultats sont-ils cohérents? Donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de l'extremum local  $m$  et une valeur approchée à  $10^{-1}$  des coordonnées du point  $(x_0, y_0)$  où celui-ci est atteint.

- (3) Calculer les dérivées partielles premières et secondes de  $f$ .
- (4) Déterminer les points critiques de  $f$  et former la matrice hessienne en chaque point critique.
- (5) Déterminer les valeurs propres des matrices hessiennes précédentes à l'aide de la commande `spec()` et conclure quant à l'existence d'un extremum local pour  $f$ .

## 5 Exercices d'annales

**Exercice 7.** (D'après **EDHEC 2017**) On considère la fonction  $f$  qui à tout couple  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  associe le réel

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

- (1) Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
- (2) (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de  $f$ .  
 (b) Montrer que le gradient de  $f$  est nul si, et seulement si, on a :

$$\begin{cases} x^3 - x + y &= 0 \\ y^3 + x - y &= 0 \end{cases}.$$

- (c) En déduire que  $f$  possède trois points critiques :  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ,  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .
- (3) (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de  $f$ .  
 (b) Écrire la matrice hessienne de  $f$  en chaque point critique.  
 (c) Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que  $f$  admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.  
 (d) Déterminer les signes de  $f(x, x)$  et  $f(x, -x)$  au voisinage de  $x = 0$ . Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de  $f$ .
- (4) (a) Pour tout  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$ , calculer  $f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2$ .  
 (b) Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de  $f$  ?
- (5) (a) Compléter la deuxième ligne du script suivant afin de définir la fonction  $f$ .

```
function z=f(x,y)
z= .....
endfunction
```

```
x=linspace(-2,2,101)
y=x
fplotd3d(x,y,f)
```

- (b) Le script précédent, une fois complété, renvoie l'une des trois nappes suivantes. Laquelle ? Justifier la réponse.

