ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

T.P. n°6

Opérations pointées
Séries numériques. Sommes partielles

☞ Si x est une matrice (et *a fortiori* un vecteur ligne ou colonne), l'opération `x.^k` permet de définir la matrice obtenue en élevant chaque coefficient de x à la puissance k

Par exemple, l'instruction `[1:5].^(-1)` renvoie le vecteur
$$\left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right]$$

☞ Si v est un vecteur, la l'instruction `cumsum(v)` renvoie un vecteur de même longueur dont le $i-$ème coefficient est la somme des i premiers éléments de v.

Par exemple, l'instruction `cumsum(1:5)` renvoie le vecteur $[1, 3, 6, 10, 15]$.

Exercice 1.

(1) Une série de Riemann convergente.

(a) Compléter la fonction et le programme ci-dessous permettant le calcul et la représentation graphique de la suite (S_n) des sommes partielles de la série de Riemann de paramètre $\alpha = 2$.
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

```
function s=Serie2(n)
    y=[1:n].^(-2);
    s=..................
endfunction

n=input('n=?')
X=1:n;
Y=feval(......., .......)
plot2d(........., ......., -4) //-4 correspond à des losanges
```

(b) Donner une estimation, par lecture graphique, à 10^{-2} près, de la somme de la série. Taper, dans la console, l'instruction suivante et interpréter

```
--> %pi^2/6
```

(2) Série Alternée. Avec `cumsum()`

(a) Compléter la fonction (et le programme) ci-dessous afin que celle-ci renvoie un vecteur dont les composantes sont les sommes partielles de la série

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^n}{n}$$

```
function U=S_alt(n)
    v=((-1)^[1:n]).*([1:n].^(-1))
    U=cumsum(v)
endfunction

n=input('n=?')
plot2d(........., ......., -1)
```

(b) Commenter la figure obtenue.

(c) Transformer le programme précédent pour étudier graphiquement la convergence absolue de la série. Commenter.

Exercice 2.

(1) Compléter la fonction suivante prenant en argument un entier $n \geq 1$ et renvoyant le vecteur `U` des $n+1$ premiers termes de la suite des sommes partielles de la série de terme général $u_n = n^2/3^n$.

```
function U=exo2(n)
    N=0:n;
    Y=....................
    U=cumsum(Y)
endfunction
```

(2) Représenter graphiquement les 101 premiers termes de la suite des sommes partielles et conjecturer quand à la nature de la série ainsi que sur la valeur de sa somme éventuelle.

(3) Retrouver ces résultats par une démonstration théorique.

Exercice 3. (D'après **ECRICOME 2015**)

On s'intéresse à la suite récurrente - étudiée dans le DS n°2 - (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = 1 - \exp(-u_n).$$

(1) Compléter le programme ci-dessous permettant le calcul des 100 premiers éléments de (u_n)

```
U=zeros(1, 100)
U(1)=................
for n=1: ...............
    U(n+1)=...........
end
plot2d(1:100, U, -1)
```

(2) On modifie le programme précédent en remplaçant la dernière ligne par les instructions suivantes

```
X=1:100
S=cumsum(U)
Y=log(X)
plot2d(X, S, -1)
plot2d(X, Y)
```

(a) Que représente le vecteur `S`?

(b) Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la nature de la série terme général u_n?