ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

T.P. n°9

Simulation de v.a. discrètes

Exercice 1. (Temps d'attente)

(1) Écrire une fonction `Attente()` prenant en argument p et simulant une loi géométrique de paramètre p.

(2) On s'intéresse à l'expérience suivante. Une urne contient deux lots identiques de n boules chacun. On tire simultanément deux boules dans l'urne. Si elles ne sont pas identiques, elles sont remises dans l'urne et on recommence à tirer jusqu'à l'obtention de deux boules identiques. On note T_n le nombre de tirages effectués. Les deux boules identiques ayant été retirées, il en reste $2(n-1)$ dans l'urne et on recommence le processus jusqu'à vider l'urne. On note

$$Z = T_n + T_{n-1} + ... + T_1$$

le nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne complètement.

 (a) Écrire une fonction `Y=T(m)` simulant la variable aléatoire T_m.
 (b) Écrire, à l'aide de la fonction `T`, une fonction `Y=Z(n)` simulant la variable aléatoire Z.

Exercice 2. (Inspiré d'**EDHEC 2015**) Un joueur réalise des lancers indépendants d'une pièce truquée donnant *PILE* avec la probabilité p. On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier *PILE*.

Si N prend la valeur n, le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que ce joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair. On appelle X la variable aléatoire égale au numéro de la boule extraite.

(1) Montrer que, si $m \in \mathbb{N}$, m est pair si et seulement si $2 \times \lfloor \frac{m}{2} \rfloor = m$.

(2) Écrire une fonction `Y=EDHEC2015(p)` simulant la variable X pour le paramètre p.

Exercice 3. (D'après **ECRICOME 2017**) Soit n un entier naturel non nul.
On effectue une série illimité de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On considère la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Soit également Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ P(Y = k) = \frac{k-1}{k!}.$$

(1) Écrire une fonction `y=T(n)` permettant de simuler la variable T_n.

On peut montrer (et en fait le sujet le demandait) que (T_n) *converge en loi* vers T, c'est à dire que, tout entier naturel k non nul,

$$\lim_{n\to+\infty} P(T_n = k) = P(Y = k).$$

(2) Recopier et exécuter le script suivant pour les valeur de n suivantes:

$$n = 5, \qquad n = 10, \qquad n = 50, \qquad n = 100, \qquad n = 1000.$$

```
function y=freqT(n)
    y = zeros(1,n)
    for i=1:100000
        k = T(n)
        y(k) = y(k)+1
    end
    y = y/100000
endfunction

function y=loitheoY(n)
    y = zeros(1,n)
    for k=1:n
        y(k) = (k-1)/prod(1:k)
    end
endfunction

clf
n = input('n=?')
plot2d(loitheoY(6),style=-2)
x = freqT(n)
bar(x(1:5))
```

(3) Expliquer ce que représentent les vecteurs renvoyés par les fonctions `freqT` et `loitheoY`. Comment ces vecteurs sont-ils représentés graphiquement dans chaque graphique obtenu ?

(4) Expliquer en quoi cette succession de graphiques permet d'illustrer le résultat susnommé?

Exercice 4. Une guirlande électrique est composée de spots nommés de bas en haut S_1, S_2, S_3, S_4 et change d'état de la manière suivante:

- à l'instant $t = 0$, le spot S_1 est allumé;
- si, à l'instant $t = n$ le spot S_1 est allumé, alors un (et un seul) des spots autres spots s'allume à l'instant $t = n + 1$, et ceci de manière équiprobable;
- si, à l'instant $t = n$ le spot S_k $(2 \leq k \leq 4)$ est allumé, le spot S_{k-1} s'allume à l'instant $t = n + 1$.
  On pourra remarquer qu'à chaque instant, un et un seul spot est allumé. On note X la variable aléatoire représentant le premier instant où le spot S_2 s'allume.

(1) (a) Écrire une fonction `y=spot2()` qui simule la variable aléatoire X.
    (b) Donner ensuite une valeur empirique de $E(X)$.

(2) Déterminer de façon théorique la loi de X. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

☞ Dans tous les derniers exercices, on a pu voir comment la fonction `rand()` permettait de simuler la réalisation de certaines expériences ou variables aléatoires. S'il est capital de savoir refaire tous ces exercices et de n'utiliser que la fonction `rand()`, on peut directement appeler les lois usuelles à l'aide de la fonction `grand()`. Plus précisément,

- `Y=grand(m,n,'bin',N,p)` affecte à `Y` une matrice de taille $m \times n$ dont chaque coefficient suit une loi binomiale de paramètres N, p. (Les $n \times m$ variables `Y(i,j)` modélisent des épreuves indépendantes.
- `Y=grand(m,n,'geom',p)` affecte à `Y` une matrice de taille $m \times n$ dont chaque coefficient suit une loi géométrique de paramètre p. (Les $n \times m$ variables `Y(i,j)` modélisent des épreuves indépendantes.
- `Y=grand(m,n,'poi', mu)` affecte à `Y` une matrice de taille $m \times n$ dont chaque coefficient suit une loi de Poisson de paramètre `mu`. (Les $n \times m$ variables `Y(i,j)` modélisent des épreuves indépendantes.

Exercice 5. (Comparaison Géométrique théorique et empirique)

(1) Écrire un programme (et l'enregistrer sous le nom `distrib_geom.sce`) qui

- demande à l'utilisateur d'entrer la valeur d'un paramètre `p`:
- demande à l'utilisateur d'entrer la valeur d'un paramètre `N`;
- réalise la simulation d'un échantillon de `N` v.a.r. indépendantes de loi géométrique $\mathcal{G}$(`p`) (on stocke le résultat obtenu dans une variable `obs`);
- trace le diagramme des effectifs de cette simulation.

☞ On utilisera les commandes `tabul(obs, 'i')` et `bar` et on en profitera pour expliquer ce qu'elles font.

(2) Ajouter `width=0.4,'red'` dans l'appel à la fonction `bar`. À quoi servent ces arguments optionnels?

(3) Comment modifier le programme précédent afin d'obtenir le diagramme des fréquences ? Le faire.

(4) On ajoute les lignes suivantes

```
x = 1:10
y = (1-p) ^ (x-1) * p
bar(x, y, width=0.4)
```

(a) Que contient la variable `y`? Que cela représente-t-il pour une v.a.r X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$?
(b) Représenter simultanément les diagrammes à bâtons des valeurs théoriques et empiriques. On ajustera le programme afin d'éviter toute superposition des bâtons.