

---

## (Petits) exercices supplémentaires

Semaine 1

---

### Exercice 1. (Négation)

- (1) Écrire, à l'aide de quantificateurs, le fait qu'une fonction  $f$  ne prenne jamais la même valeur en deux points distincts, puis nier cette propriété.
- (2) Écrire, à l'aide de quantificateurs, le fait qu'une fonction  $f$  admette un minimum, puis nier cette propriété.
- (3) Écrire la négation de l'assertion suivante

« S'il fait beau, je vais me baigner dans le Danube. »

**Exercice 2.** Pour chacune des assertions suivantes, expliciter (à l'aide d'une courbe sommairement tracée) une fonction  $f$  vérifiant puis une autre fonction ne vérifiant pas la propriété:

- (1)  $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$ ;
- (2)  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \implies x \geq 0$ ;
- (3)  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 1$  ou  $f(x) \leq -1$ .

**Exercice 3.** Une commode est composée de  $k$  tiroirs et on veut y ranger  $n$  paires de chaussettes (avec  $n, k \in \mathbb{N}^*$ ). Montrer, par l'absurde que, nécessairement, s'il y a davantage de paires que de tiroirs (*i.e* si  $n > k$ ), il y aura un tiroir contenant au moins deux paires de chaussettes.

**Exercice 4.** Résoudre dans  $\mathbb{R}$ :

$$(E_1) \quad \sqrt{4x^2 - 4x + 1} = 5; \quad (E_2) \quad \frac{1}{1 - \frac{x}{x-1}} - x = -1; \quad (E_3) \quad |x - 3| + 2|x - 1| = 0.$$

**Exercice 5.** Simplifier

$$A_n = \frac{(-1)^n - (-1)^{n-1}}{(-1)^{2n} - (-1)^{2n+1}}, \quad B_n = \frac{10^{n+1} - 9 \times 10^n - 10^{n+2}}{20 \times 10^{n-2} + 8 \times 10^{n-1} - 10^{n+1}}, \quad C = \left( \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \right)^2.$$

**Exercice 6.** Déterminer l'ensemble de définition de la fonction

$$x \mapsto \ln(e^x - e^{-x});$$

**Exercice 7.** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Montrer que

$$a^2 + b^2 = 0 \iff a = b = 0.$$

**Exercice 8.** \* Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

**Exercice 9.** \* Montrer, par contraposée, que si  $A$  et  $B$  sont deux ensembles alors

$$(A \cap B = A \cup B) \implies A = B.$$

Et en Bonus, un exercice qui ressemble un peu plus à une énigme.

**Exercice 10.** \* (Un facteur perspicace)

Connaissant l'intérêt de son facteur pour les énigmes, un homme lui déclare un jour : « J'ai trois filles, le produit de leurs âges vaut 36 et la somme de leurs âges est égale au numéro de la maison en face ». Le facteur, intrigué, réfléchit quelques instants puis dit : « J'y suis presque, mais il me manque un indice ». L'homme rajoute alors : « Mais oui, j'ai oublié de vous dire que l'aînée a les yeux verts! ». Le facteur s'exclame « J'ai trouvé ! ». Quel âge ont les filles ?