ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

(Petits) exercices supplémentaires

Semaine 1

Exercice 1. (Négation)

(1) La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur s'écrit comme:

$$\forall x, y, \quad f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$$

ou de manière équivalente

$$\forall x, y, \quad x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y).$$

(Si on part d'éléments différents, les images sont forcément différents. Nous verrons que cette propriété s'appelle *injectivité* de la fonction f). La négation se formule comme ceci

$$\exists x, y, \quad x \neq y \quad \text{et} \quad f(x) = f(y).$$

(2) Le fait qu'une fonction f admette un minimum s'écrit

$$\exists x, \ \forall y, \quad f(y) \geq f(x).$$

La négation s'écrit alors

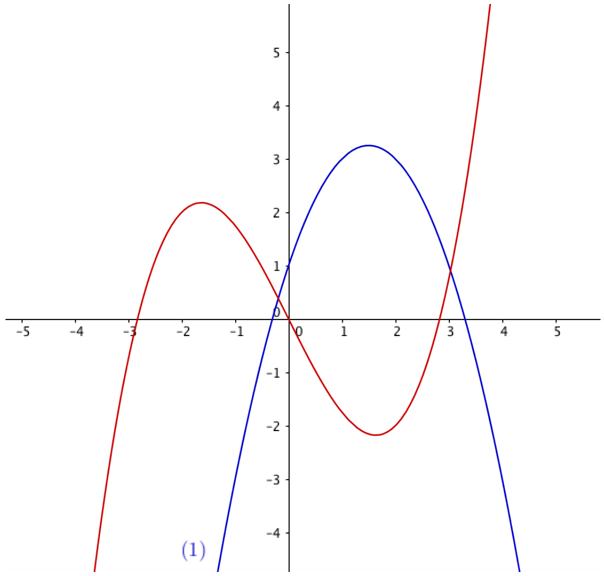
$$\forall x, \ \exists y, \quad f(y) < f(x).$$

(3) La négation de cette agréable et enthousiasmante assertion est

« Il fait beau et je ne vais pas me baigner dans le Danube. »

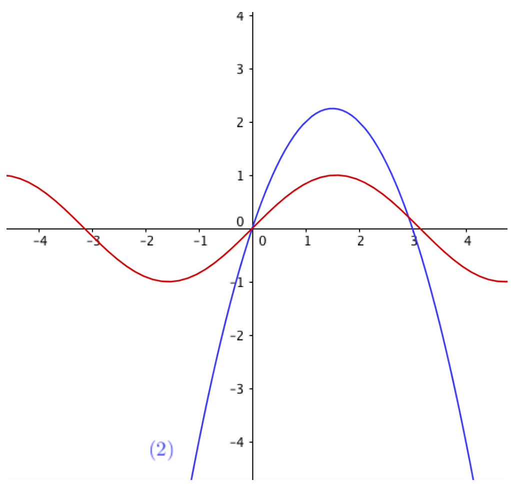
Exercice 2. Pour chacune des assertions suivantes, on représente en bleu la courbe d'**une** fonction vérifiant la propriété (il y une infinité d'exemples que l'on pourrait fournir) et en rouge, sur le même graphique, celle d'une fonction qui vérifie la négation de cette même propriété.

(1) $\exists M \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \leq M$;
Ceci signifie que la fonction est *majorée*, c'est à dire que ses valeurs sont toutes plus petites qu'une certaine valeur M (ainsi que tous les nombres plus grands que M). La négation signifie que la fonction n'est pas majorée, ou qu'elle peut prendre des valeurs arbitrairement grandes; toute valeur sera toujours dépassée: $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, \ f(x) > M$.



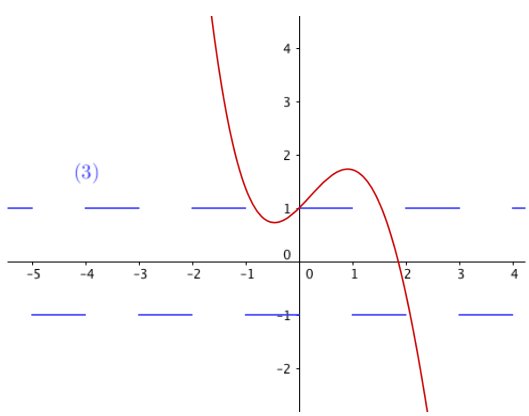
(2) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0 \Longrightarrow x \geq 0$;

Cette implication signifie que les seules valeurs pour lesquelles la fonction peut être positive sont les valeurs positives. Attention, la fonction peut quand même prendre des valeurs négatives sur les $x \geq 0$, la flèche ne va que dans un sens! Sa négation est l'existence d'un $x < 0$ pour lequel $f(x) \geq 0$: $\exists x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$ et $x < 0$.



(3) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 1$ ou $f(x) \leq -1$.

Dans ce dernier cas, la fonction ne peut prendre que les valeurs 1 ou -1. On peut choisir une fonction constante égale à l'une de ces deux valeurs ou bien une fonction qui peut prendre les deux valeurs, mais attention elle ne peut en aucun cas être continue. La négation revient tout simplement à dire que la fonction peut prendre une valeur différente à la fois de 1 et -1: $\exists x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 1$ et $f(x) \neq -1$.



Exercice 3. On raisonne par l'absurde. L'idée est de dire que si le nombre de paires de chaussettes par tiroir est trop faible, au total on n'obtiendra pas toutes les paires. D'un point de vue mathématique avec de la rigueur, on peut rédiger comme ça. Il y k tiroirs, notons alors $t_1, t_2, ..., t_k$ le nombre de paires dans chacun des tiroirs (t_i nombre de paires dans le $i-$ème tiroir). Comme on a en tout n paires de chaussettes, il est clair que

$$t_1 + t_2 + ... + t_k = n.$$

Supposons alors que chaque tiroir ne contienne au plus qu'une paire de chaussette (qui est bien la négation du fait qu'au moins un tiroir en contient deux), c'est à dire que

$$\forall i \in \{1, 2, ..., k\}, \quad t_i \leq 1.$$

En sommant, on obtient donc

$$n = t_1 + t_2 + ... + t_k \leq 1 + 1 + ... + 1 = k,$$

c'est à dire que $n \leq k$. Or, on sait que $k < n$. Notre hypothèse est alors absurde et on a bien la conclusion souhaitée.

Exercice 4. On commence par déterminer pour quelles valeurs réelles de x la racine de cette première équation est bien définie. La polynôme du second degré se factorise facilement (identité remarquable) $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$, ce qui est donc toujours positif ou nulle et garantit l'existence de la racine pour toute valeur réelle de x. Mais alors, l'équation devient

$$\sqrt{(2x-1)^2} = 5 \Longleftrightarrow |2x-1| = 5.$$

On distingue donc deux cas, suivant comment simplifier la valeur absolue. Si $x \geq 1/2$, alors l'équation devient $2x - 1 = 5$ donc la solution est $x = 3$ qui est bien un nombre supérieur ou égal à $1/2$ et fournit donc une solution à l'équation.

Si $x < 1/2$, l'équation devient $1 - 2x = 5$ ou encore $x = -2$ qui est encore bien une solution de l'équation. Au final, il y a donc deux solutions

$$\mathcal{S} = \{-2; 3\}.$$

Pour cette deuxième équation, on voit qu'il est tout d'abord nécessaire que $n \neq 1$. Ensuite, il faut aussi que $1 - x/(x-1)$ ne s'annule pas, mais comme

$$1 - \frac{x}{x-1} = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x},$$

cette quantité ne s'annule pas. Ainsi, on a

$$\frac{1}{1-\frac{x}{x-1}} - x = -1 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & \neq & 1 \\ 1-x-x & = & -1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & \neq & 1 \\ 2x & = & 2 \end{array} \right.,$$

ce qui est clairement impossible et l'équation n'a pas de solution.

Pour résoudre cette dernière équation, il faut commencer par ôter les valeurs absolues, en distinguant différents cas, selon le signe de la quantité à l'intérieur:

$$|x-3| + 2|x-1| = \left\{ \begin{array}{ll} 3 - x + 2(1-x), & \text{si } x < 1 \\ 3 - x + 2(x-1), & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ x - 3 + 2(x-1), & \text{si } 3 \leq x \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{ll} 5 - 3x, & \text{si } x < 1 \\ x + 1, & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 3x - 5, & \text{si } 3 \leq x \end{array} \right.$$

On regarde ensuite, sur chacun des trois morceaux, si l'expression s'annule (en un point de l'intervalle où on se trouve). On voit qu'il n'y a pas de solution.

Exercice 5. On rappelle que $(-1)^{2n} = 1$ et $(-1)^{2n+1} = -1$, ainsi

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{(-1)^n - (-1)^{n-1}}{(-1)^{2n} - (-1)^{2n+1}} = \frac{(-1)^n - (-1)^{n-1}}{1-(-1)} \\ &= \frac{(-1)^n - (-1)^{n-1}}{2} = \frac{(-1)^{n-1}(-1-1)}{2} \\ &= -(-1)^{n-1} = (-1)^n. \end{aligned}$$

Pour la seconde simplification, on factorise par la plus haute puissance de 10 commune aux autres termes:

$$B_n = \frac{10^n\left(10-9-10^2\right)}{10^{n-1}\left(2+8-10^2\right)} = \frac{10\times(-99)}{-90} = 11.$$

Enfin, cette troisième expression se calcule à l'aide des identités remarquables

$$\begin{aligned}
C &= \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2 \\
&= 3-2\sqrt{2}-2\sqrt{3-2\sqrt{2}}\times\sqrt{3+2\sqrt{2}}+3+2\sqrt{2} \\
&= 6-2\sqrt{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} \\
&= 6-2\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2} = 6-2\sqrt{9-8} = 6-2 \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Exercice 6. La fonction sera définie pour l'ensemble des réels x tels que l'argument du logarithme est strictement positif, c'est à dire l'ensemble des réels x tels que $e^x - e^{-x} > 0$. Il faut donc résoudre une inéquation! Comme souvent avec des combinaisons d'exponentielles, on factorise par $e{-}x$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
e^x - e^{-x} > 0 &\iff e^{-x}\left(e^{2x}-1\right) > 0 \\
&\iff e^{2x}-1 > 0 \qquad (\text{car, } \forall x\in\mathbb{R},\ e^{-x}>0) \\
&\iff e^{2x} > 1 \iff 2x > \ln(1) = 0 \\
&\iff x > 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble de définition de cette fonction est tout simplement $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 7. Il s'agit ici d'une équivalence. On raisonne donc par double implication. Il y a un sens très facile. En effet, commençons par supposer que $a = b = 0$. Alors, $a^2 = b^2 = 0^2 = 0$ et trivialement $a^2+b^2 = 0+0 = 0$. Bon, c'est déjà ça.

Pour l'autre implication, on raisonne par contraposée. Supposons que a et b ne soient pas tous deux égaux à 0, c'est à dire qu'au moins un des deux nombres est non nul (on peut supposer, sans perte de généralité car les deux nombres jouent le même rôle, qu'il s'agit de a - sinon on fait le même raisonnement avec b), il est alors clair que - un carré étant toujours positif ou nul - $a^2 > 0$. ($a^2 = 0$ seulement si $a = 0$ ce qu'on suppose ne pas être le cas). Mais alors,

$$a^2 + b^2 > 0 + b^2 = b^2 \geq 0.$$

Au final, $a^2 + b^2 \neq 0$, ce qui est bien la conclusion attendue et termine la démonstration de l'équivalence.

Exercice 8. *

Alors, par définition de la partie entière de x, on a déjà

$$\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1$$

Ainsi, en multipliant par n qui est positif

$$n\lfloor x\rfloor \leq nx < n\lfloor x\rfloor + n$$

En particulier, $n\lfloor x\rfloor$ est un entier qui est plus petit que nx. On ne peut pas conclure que c'est la partie entière de nx car il pourrait y avoir d'autres entiers qui sont plus grands que $n\lfloor x\rfloor$ en restant plus petits que nx, mais comme $\lfloor nx\rfloor$ est le plus grand de ces entiers, il est dans tous les cas plus grand que $n\lfloor x\rfloor$ et de plus, $\lfloor nx\rfloor$ est plus petit que nx qui est strictement plus petit que $n\lfloor x\rfloor + n$, c'est à dire que

$$n\lfloor x\rfloor \leq \lfloor nx\rfloor < n\lfloor x\rfloor + n.$$

On divise alors tout ça par n:

$$\lfloor x \rfloor \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Mais alors, comme $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor + 1$ sont deux entiers consécutifs qui encadrent (largement à gauche et strictement à droite) $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$, le terme de gauche correspond bien à la partie entière:

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Exercice 9. *

La contraposée de l'implication à démontrer se formule comme ceci:

$$A \neq B \Longrightarrow (A \cap B \neq A \cup B).$$

Supposons donc que $A \neq B$. Cela veut dire qu'il existe un élément de A qui n'est pas dans B ou un élément de B qui n'est pas dans A. Quitte à inverser A et B (qui ici jouent des rôles symétriques, il s'agit de deux ensembles qui n'ont pas de propriété particulière), on peut donc supposer (sans perte de généralité) qu'il existe $x \in A$ tel que $x \notin B$. Cet élément x est clairement dans la réunion de A et B (*i.e.*$x \in A \cup B$) car il est dans A mais il ne peut pas être dans l'intersection des deux ensembles car il n'est pas dans B, ainsi $x \notin A \cap B$, ce qui montre bien que l'intersection et la réunion ne coïncident pas:

$$A \cup B \neq A \cap B$$

et termine la démonstration.

Exercice 10. * (Un facteur perspicace)

Les âges des trois filles sont trois nombres entiers (naturels), il faut donc commencer par lister l'ensemble des triplets d'entiers dont le produit fait 36, puis faire le total S:

- $1, 1, 36, \quad S = 38;$
- $1, 2, 18, \quad S = 21;$
- $1, 3, 12, \quad S = 16;$
- $1, 4, 9, \quad S = 14;$
- $1, 6, 6, \quad S = 13;$
- $2, 2, 9, \quad S = 13;$
- $2, 3, 6, \quad S = 11;$
- $3, 3, 4, \quad S = 10;$

Le facteur dispose de l'information que le total S est égal au numéro de la maison d'en face, nombre qu'il peut donc voir. Malgré cette information, ce dernier ne peut conclure. Cette situation ne peut avoir lieu que si le total qu'il a obtenu provient de plusieurs triplets différents. Dans la liste ci-dessus, il n'y a que deux triplets qui ont le même total. On est donc certain d'être dans un des deux cas $1, 6, 6$ ou $2, 2, 9$. Mais alors, on apprend que l'aînée a les yeux verts. Notamment, il y a une aînée, ce qui permet d'éliminer le cas avec des jumelles comme enfants les plus âgés. On peut donc conclure que les trois filles ont 9 ans pour l'aînée et 2 ans pour les deux jumelles.