ECE 2 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Chapitre 11. Convergences et approximations

Dans tout le chapitre on ne s'intéresse qu'à des variables aléatoires réelles discrètes ou bien à densité.

1 Inégalités probabilistes

On donne dans ce cours - et on démontre - deux inégalités classiques, bien que grossières, qui permettent d'obtenir des renseignements sur la concentration des valeurs prises par une variable aléatoire, en particulier autour de sa moyenne. Ces inégalités nous serviront principalement à démontrer les résultats de convergences en probabilités qui suivront.

1.1 Inégalité de Markov

Théorème 1. *(Inégalité de Markov) Soit X une v.a.* ***positive*** *admettant une espérance. Alors,*

$$\forall t > 0, \qquad P(X \geq t) \leq \frac{\mathrm{E}(X)}{t}$$

☞ On sait déjà que $t \mapsto P(X \geq t)$ est décroissante. Cette inégalité permet de voir que la décroissance se fait à une vitesse d'au moins $1/t$.

☞ Cette inégalité, bien que souvent très utile, reste très grossière pour estimer les *queues de probabilités*. Par exemple, si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, on sait que $P(X \geq t) = e^{-\lambda t} = o(1/\lambda t)$.

☞ En combinant cette inégalité (appliquée à $|X|^r$) avec la croissance de la fonction $t \mapsto t^r$ sur $\mathbb{R}_+$, on voit que, si X admet un moment d'ordre r, alors

$$\forall t > 0 \qquad P(|X| \geq t) \leq \frac{\mathrm{E}(|X|^r)}{t^r}.$$

Ainsi, plus la variable admet des moments d'ordres élevés, plus les queues de probabilités décroissent vite.

Preuve. On distingue deux cas: si X est une variable aléatoire discrète et si X est à densité. Dans les deux cas, $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ ce qui permet les minorations qui vont apparaître. Soit $t > 0$.

- Si X est une variable aléatoire discrète, alors

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X=k) = \sum_{k<t} kP(X=k) + \sum_{k \geq t} kP(X=k) \\ &\geq \sum_{k \geq t} kP(X=k) \qquad\qquad (\text{car } k \geq 0) \\ &\geq t \sum_{k \geq t} P(X=k) = tP(X \geq t) \end{aligned}$$

et on a bien
$$P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}.$$

- Si X est une variable à densité et que f est une densité de X alors, comme X est à valeurs positives, $f(x) = 0$ si $x < 0$. Il suit que
$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^t xf(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^t xf(x)\mathrm{d}x + \int_t^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \\ &\geq \int_t^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \\ &\geq t\int_t^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = tP(X \geq t) \end{aligned}$$
et on a bien
$$P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}.$$

□

1.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 2. *(Inégalité de Bienaymé-Tchebychev) Soit X une v.a. admettant une variance (finie). Alors,*
$$\forall t > 0, \quad P\left(|X - E(X)| \geq t\right) \leq \frac{V(X)}{t^2}.$$

☞ Dans cette inégalité, on considère la variable *centrée* $X - E(X)$. On s'intéresse donc à la probabilité de déviation de X vis-à-vis de son espérance. Le résultat n'a, naturellement, d'intérêt que pour t grand.

☞ Nous savons que la variance quantifie l'étalement d'une variable aléatoire autour de son espérance. Ce théorème donne une majoration précise de la probabilité de déviation de cette espérance; X dévie de son espérance de plus de t avec une probabilité décroissante à vitesse $1/t^2$ (avec un certain coefficient multiplicatif: la variance de X).

Preuve. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Markov à la variable $(X - E(X))^2$ (qui admet bien une espérance car X admet une variance). On a alors, par croissance de $t \mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$,
$$P(|X - E(X)| \geq t) = P((X - E(X)^2) \geq t^2) \leq \frac{E\left((X - E(X))^2\right)}{t^2} = \frac{V(X)}{t^2}.$$

□

Exercice 1. (Un théorème puissant mais parfois grossier)

(1) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$.
   (a) Rappeler la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$. Que vaut $P(|X - E(X)| > t)$ pour $t \geq 1/2$?
   (b) Exprimer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Commenter.

(2) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.
   (a) Rappeler la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$. Que vaut $P(|X - E(X)| > t)$ pour $t > 1$?
   (b) Exprimer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Commenter.

Exercice 2. Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ n v.a. (mutuellement) indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$. Montrer que
$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - p\right| \geq t\right) \leq \frac{p(1-p)}{nt^2}.$$

Exercice 3. On lance plusieurs fois une pièce parfaitement équilibrée. Les lancers sont indépendants. Combien de lancers faut-il effectuer pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du *Pile* au cours de ces lancers sera comprise entre 49% et 51%?

2 La loi faible des grands nombres

Le théorème suivant permet d'observer *a posteriori* la cohérence du modèle probabiliste avec l'approche empirique et intuitive de la notion de probabilité.

Théorème 3. *(Loi faible des grands nombres) Soit (X_n) une suite de v.a. (mutuellement) indépendantes, admettant une même espérance m et une même variance σ^2. Soit*

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}.$$

Alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n \to +\infty} P\left(|\overline{X}_n - m| \geq \varepsilon\right) = 0 \quad et \quad \lim_{n \to +\infty} P\left(|\overline{X}_n - m| < \varepsilon\right) = 1.$$

☞ Ce théorème signifie donc moralement que la moyenne de n variables aléatoires indépendantes suivant une même loi *converge* vers leur espérance commune.

Preuve. Commençons par observer que (d'après la linéarité de l'espérance et les propriétés de la variance vues au Chapitre 9),

$$E(\overline{X}_n) = m, \qquad V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors

$$P\left(|\overline{X}_n - m| \geq \varepsilon\right) = P\left(|\overline{X}_n - E(\overline{X}_n| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(\overline{X}_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

□

3 Convergences

3.1 Convergence en loi

Définition 1. *Soient (X_n) une suite de v.a. et X une autre v.a. On note respectivement F_{X_n} et F_X les fonctions de répartition de X_n et de X. On dit que X_n* ***converge en loi*** *vers X, si, pour tout réel t où la fonction F_x est continue, on a*

$$\lim_{n \to +\infty} F_{X_n}(t) = F_X(t).$$

On note $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

✎ Pour montrer qu'une suite de v.a. converge en loi, on fixe d'abord un t (parmi les points où F_X est continue) et on fait ensuite tendre n vers l'infini.

☞ Si la variable X est à densité, sa fonction de répartition F_X est continue et la convergence ci-dessous doit donc avoir lieu en tout point $t \in \mathbb{R}$.

☞ Certaines suites de v.a. ne convergent pas. On gardera également à l'esprit qu'une suite de v.a. discrète peut converger vers une v.a. à densité et inversement.

Exercice 4. Soit (X_n) une suite de v.a. telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{E}(1 + \frac{1}{n})$. Montrer que (X_n) converge en loi vers une v.a. Z à déterminer.

Exercice 5. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0; n]\!])$ et $Y_n = \frac{1}{n} X_n$.

(1) Montrer que
$$F_{X_n}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ \frac{\lfloor t \rfloor + 1}{n+1}, & \text{si } t \in [0; n] \\ 1, & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

(2) En déduire l'expression de $F_{Y_n}(t)$.

(3) Conclure que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$, où $Z \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$.

Exercice 6. Soit $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([n; n+1])$. Montrer que (X_n) ne converge pas en loi.

La proposition suivante est une conséquence immédiate des définitions de fonction de répartition et de convergence en loi.

Proposition 1. Soit (X_n) une suite de v.a. telle que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. Pour tous réels a, b points de continuité de F_X avec $a < b$, on a
$$\lim_{n \to +\infty} P(a < X_n \leq b) = P(a < X \leq b).$$

Une conséquence de cette proposition est le théorème suivant, permettant la caractérisation de la convergence en loi pour les v.a. discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Théorème 4. *Soient X une v.a. discrète telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et (X_n) une suite de v.a. discrètes avec la même propriété. Alors,*
$$\left(X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \right) \iff \left(\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n \to +\infty} P(X_n = k) = P(X = k) \right).$$

Exercice 7. Soit (X_n) une suite de v.a. telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right)$. Montrer que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, où $X \hookrightarrow \mathcal{B}(\ln(2))$.

3.2 Application: convergence de binomiales vers Poisson

Le résultat suivant permet de comprendre la terminologie *loi des évènements rares* appliquée à la loi de Poisson. En effet, un processus de comptage de succès, lorsque la probabilité du succès est très petite devant le nombre d'observations, peut être approché par une loi de Poisson.

Proposition 2. Soient λ un réel strictement positif et (X_n) une suite de v.a. telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$. Alors, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

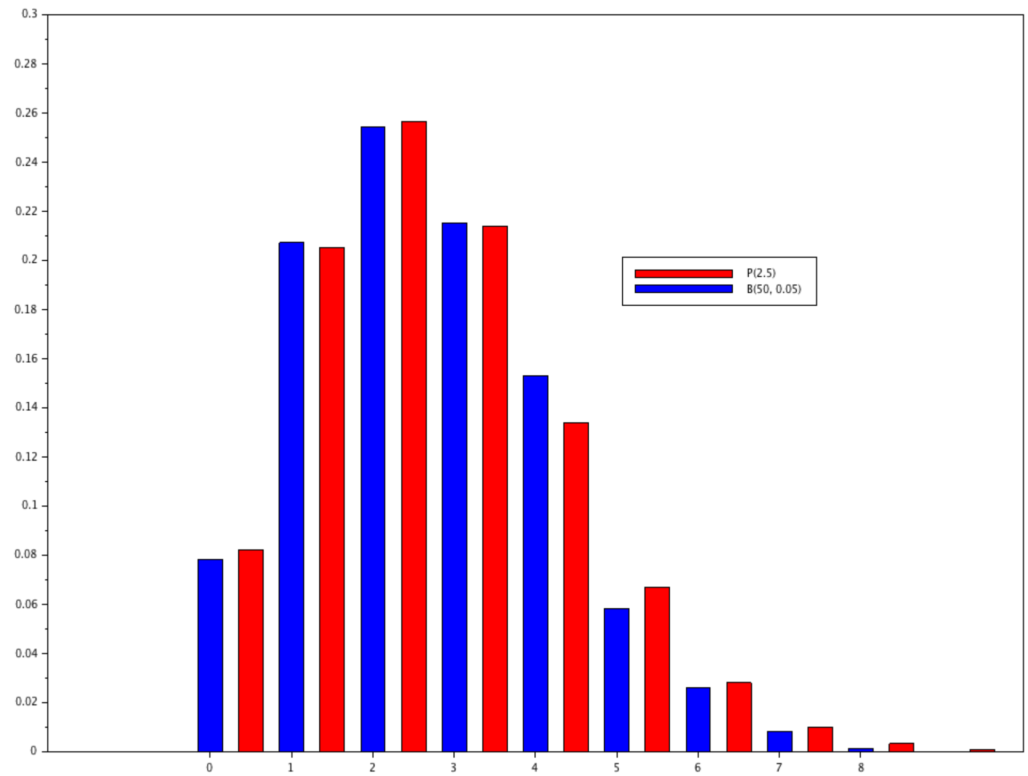
☞ En pratique, si p est petit et n grand, alors on approche une loi $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi $\mathcal{P}(np)$. L'approximation sera toujours indiquée dans les sujets.

Exemple. L'exécution du programme `SciLab` suivant illustre la remarque précédente.

```
X=grand(1,1000, 'bin', 50, .05); //échantillon empirique de loi binomiale
U=tabul(X, 'i')
n=length(U(:,1))
x=0:n;
y=zeros(1, n+1)
y(1)=exp(-2.5);
for k=2:length(x)
    y(k)=y(k-1)*2.5/(k-1); //loi de Poisson théorique
end

bar(x+0.5, y, 0.3, 'red');
bar(U(:, 1), U(:, 2)/1000, 0.3, 'blue')

legend('P(2.5)', 'B(50,0.05)',5)
```



3.3 Théorème Central Limite

Le résultat suivant, qui peut être vu comme la finalité de ce cours de mathématiques en ECE, illustre le rôle crucial de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ en statistique.

Théorème 5. *Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes de même loi, d'espérance (commune) finie m et de variance (commune) finie (et non nulle) σ^2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad \overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$$

et

$$S_n^* = \frac{S_n - E(S_n)}{\sigma(S_n)} = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}, = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - m)}{\sigma} = \frac{\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)}{\sigma(\overline{X}_n)} = \overline{X}_n^*.$$

Alors,

$$S_n^* \xrightarrow{\mathcal{L}} Z \qquad \text{et} \qquad \overline{X}_n^* \xrightarrow{\mathcal{L}} Z, \qquad \text{où} \qquad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

En particulier, notant Φ la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, on a, pour tous réels a, b avec $a < b$,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(a < S_n^* \leq b\right) = \Phi(b) - \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-t^2/2} \mathrm{d}t.$$

☞ Pour reformuler "simplement" ce résultat, la somme (ou la moyenne) de n variables aléatoires indépendantes de même loi se comporte de manière approximativement gaussienne si n est suffisamment grand.

☞ On peut donc voir ce théorème comme une précision de la loi faible des grands nombres. Celle-ci stipule que la moyenne empirique converge vers la moyenne théorique. Le théorème central limite précise moralement que la convergence a lieu à vitesse de $1/\sqrt{n}$.

Exercice 8. Soit (U_n) une suite de v.a. indépendantes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \hookrightarrow \mathcal{U}\left(\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]\right)$. Montrer que

$$\sqrt{\frac{n}{12}} \sum_{k=1}^{n} U_k \xrightarrow{\mathcal{L}} U, \qquad \text{où} \quad U \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

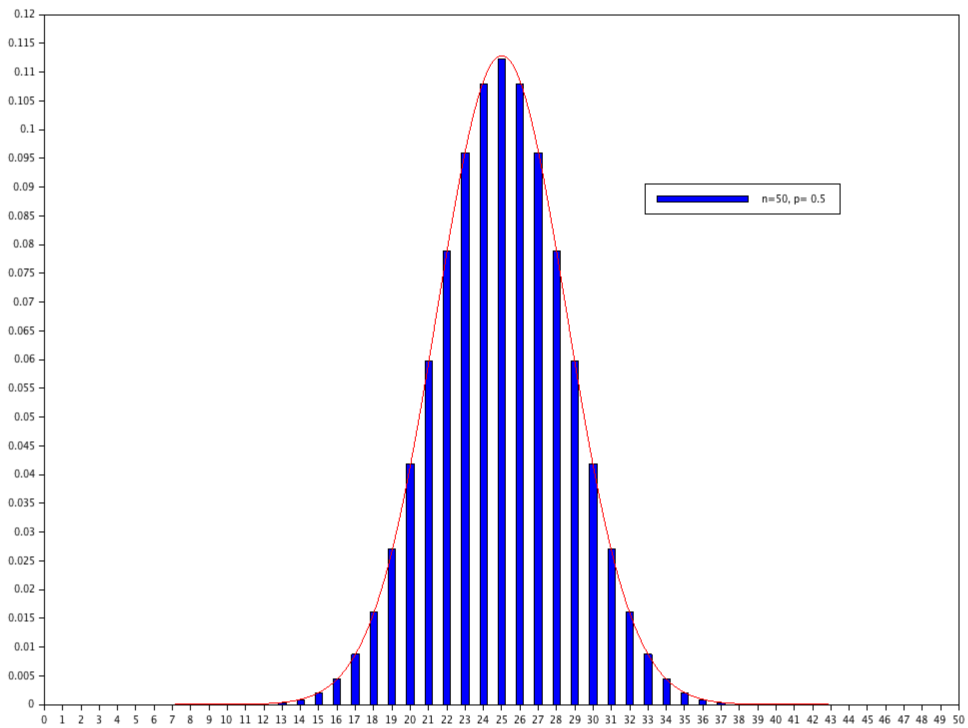
4 Approximation

4.1 Approximation d'une binomiale par une loi normale

Proposition 3. Soit (S_n) une suite de v.a. indépendante de même loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ (avec $p \in]0;1[$). Alors,

$$S_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X, \qquad \text{où} \quad X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

☞ Une loi $\mathcal{B}(n,p)$ peut donc être approchée par une loi $\mathcal{N}(np, npq)$ lorsque n est assez grand. En pratique, cette approximation est d'autant plus valide que p est proche de 0.5.



☞ On observera que l'on fait une approximation d'une loi discrète par une loi continue. Par conséquent, on approche en pratique $P(S_n = k)$ non pas par $P(X = k)$ (qui est nul comme tout le monde le sait bien), mais par $P(k - 1/2 \leq X \leq k + 1/2)$.

☞ Les instructions officielles précisent: *Toutes les indications devront êtres fournies aux candidats quant à la justification de l'utilisation des approximations.* Si le message est clair, on peut quand même mentionner que, souvent, on considère *raisonnable* d'approcher une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par une loi normale $\mathcal{N}(np, npq)$ lorsque $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $nq \geq 5$.

Exercice 9. On lance 900 fois une pièce de monnaie équilibrée et on note X le nombre de *Pile* obtenus. On veut estimer $\alpha = P(405 \leq X \leq 495)$.

(1) Quelle est la valeur exacte de α? (On exprimera le résultat sous forme d'une somme qu'on ne cherchera naturellement pas à calculer.)

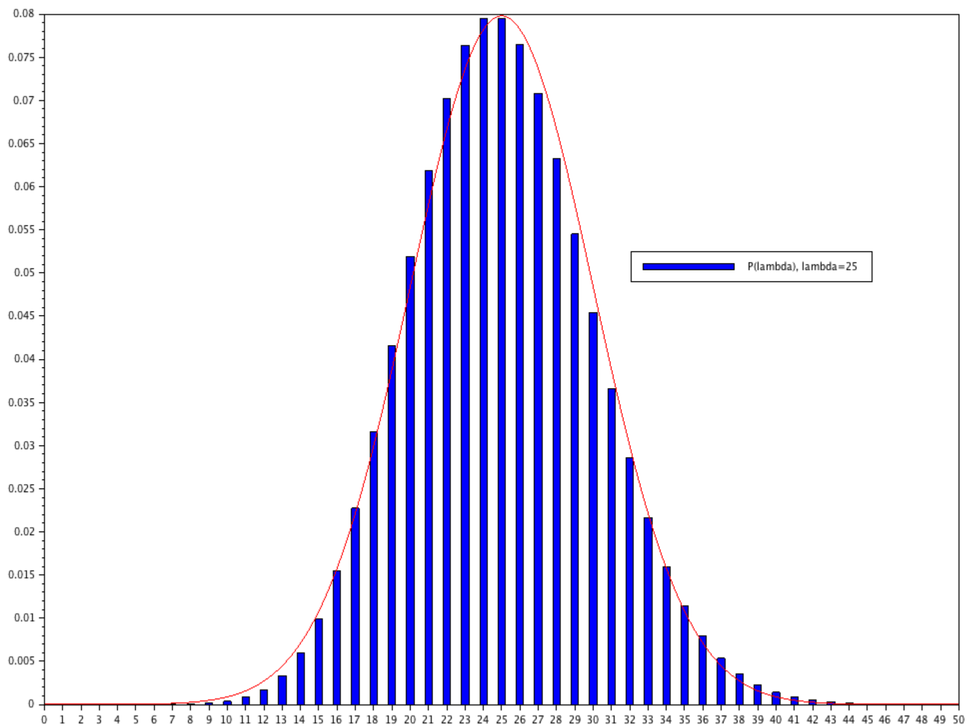
(2) Utiliser la table de la loi normale centrée réduite pour donner une estimation de α.

4.2 Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale

Proposition 4. Soit (S_n) une suite de v.a. indépendante de même loi de Poisson $\mathcal{P}(n\alpha)$ (avec $\alpha > 0$). Alors,

$$S_n^* = \frac{S_n - n\alpha}{\sqrt{n\alpha}} \xrightarrow{\mathcal{L}} X, \qquad \text{où} \quad X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

☞ Une loi $\mathcal{P}(\lambda)$ peut donc être approchée par une loi $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$ lorsque λ est assez grand.



☞ Comme pour l'approximation précédente, on suivra les indications du texte mais on peut souvent considérer qu'il est raisonnable d'approcher une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ par une loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$ lorsque $\lambda \geq 18$.

5 Autre application: simulation de la loi normale à partir d'une loi uniforme

Exercice 10. Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes de même loi uniforme $\mathcal{U}([0;1])$.

(1) Justifier que

$$\sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{k=1}^{n} X_n - \sqrt{3n} \xrightarrow{\mathcal{L}} X, \qquad \text{où} \quad X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

(2) Utiliser cette observation pour compléter le programme SciLab suivant permettant de simuler une telle variable

```
function y=normale(n)
    s=0;
    for k=1:n
        s=s+...........................
    end
    y=.................................
endfunction
```

6 Autres exercices

6.1 Manipulation des résultats et définitions

Exercice 11. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que

$$\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t \geq \sqrt{2\pi}\left(1-\frac{1}{2x^2}\right).$$

Exercice 12. Soit (X_n) une suite de v.a. (mutuellement) indépendantes avec $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p_n)$. On note $\overline{X}_n = (X_1 + ... + X_n)/n$. On veut montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\overline{X}_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

(1) Pourquoi ne peut-on pas appliquer la loi faible des grands nombres?
(2) Quelle est l'espérance de $\overline{X}_n$? Sa variance? Démontrer que $V(\overline{X}_n) \leq \frac{1}{n}$.
(3) En déduire le résultat.

Exercice 13. Soit (X_n) une suite de v.a. telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([-1/n; 1/n])$. Montrer que (X_n) converge en loi vers une v.a. X certaine égale à 0.

Exercice 14. Soit (X_n) une suite de v.a. indépendante de même loi $\mathcal{P}(1)$. On pose $S_n = X_1 + ... + X_n$.
(1) Quelle est la loi de S_n?
(2) Exprimer $P(S_n \leq n)$ en fonction de n, à l'aide d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer.
(3) En utilisant le théorème central limite, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 15. Une banque prend en charge les prêts de $n = 10^2$ clients. On considère que la probabilité de défaut pour chacun des clients est de 10^{-2}, et que la compagnie fait faillite si plus de 5% de ses clients font défaut. On note N le nombre de clients ayant effectivement fait défaut.
(1) Déterminer un intervalle du type $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ (avec ε le plus petit possible) tel que $P(N \in [1-\varepsilon; 1+\varepsilon]) \geq 0.95$ (on utilisera l'inégalité de Byenaymé-Tchebychev).
(2) Déterminer la probabilité de faillite de la banque (on utilisera l'approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson).

6.2 Exercices d'annales

Exercice 16. (D'après **EML 2006**)
(1) Soit Z une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. Rappeler la valeur de l'espérance $E(Z)$ et celle de la variance $V(Z)$ de la variable aléatoire Z.
(2) Soient un entier n supérieur ou égal à 2, et n variables aléatoires indépendantes $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$, suivant toutes le loi géométrique de paramètre p.
on considère la variable aléatoire

$$M_n = \frac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n).$$

(a) Déterminer l'espérance m et l'écart-type σ_n de M_n.
(b) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(0 \leq M_n - m \leq \sigma_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^1 e^{-t^2/2}\mathrm{d}t.$$

Exercice 17. (D'après **EDHEC 2013**) On considère n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots X_n$, $n \geqslant 2$, toutes définies sur $(\Omega; \mathcal{A}, P)$ indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0; 1]$. On pose $I_n = \min(X_1, X_2, ..., X_n)$. Déterminer la fonction de répartition de I_n et montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice 18. (D'après **HEC 2003**) Soient n un entier naturel non nul, N un entier supérieur ou égal à 2, et p un réel strictement compris entre 0 et 1.

Une compagnie aérienne a vendu n billets à cent euros pour le vol 714 qui peut accueillir jusqu'à N passagers. La probabilité pour qu'un acheteur se présente à l'embarquement est p et les comportements des acheteurs sont supposés indépendants les uns des autres.

Un acheteur qui ne se présente pas à l'embarquement est remboursé à 80%, tandis qu'un acheteur qui se présente à l'embarquement mais n'obtient pas de place, le vol étant déjà complet, est remboursé à 200%.

Soit X la variable aléatoire désignant le nombre d'acheteurs d'un billet se présentant à l'embarquement, soit Y la variable aléatoire désignant le nombre d'acheteurs d'un billet se présentant à l'embarquement mais n'obtenant pas de place et soit G la variable aléatoire désignant le montant en centaines d'euros du chiffre d'affaire de la compagnie sur le vol considéré.

On suppose ces variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

(1) Quelle est la loi de X? Donner son espérance et sa variance.
(2) Préciser, pour tout élément ω de Ω, la valeur de $Y(\omega)$ en fonction de N et de $X(\omega)$, en distinguant les cas $X(\omega) > N$ et $X(\omega) \leqslant N$.
(3) Écrire l'expression de G en fonction de n, X, Y.
(4) On suppose, dans cette question seulement, que n est inférieur ou égal à N.
Calculer alors l'espérance $\mathbf{E}(G)$ de la variable aléatoire G.

La compagnie cherche alors à évaluer la probabilité $\mathbf{P}([X \geqslant N])$ et à savoir si le nombre n aurait pu être choisi de façon à optimiser son chiffre d'affaire.

(5) On suppose, dans cette question, que p est égal à $0,5$.
  (a) Soit X^* la variable aléatoire définie par:
  $$X^* = \frac{2X - n}{\sqrt{n}}.$$
  Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire X^*.
  (b) Par quelle loi approcher la loi de X^* si n est assez grand ? Montrer qu'alors une valeur approchée de la probabilité $\mathbf{P}([X \geqslant N])$ est
  $$\Phi\left(\frac{n+1-2N}{\sqrt{n}}\right),$$
  où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
  (c) Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on pose
  $$f(x) = \frac{x+1-2N}{\sqrt{x}}.$$
  Montrer que la fonction f est croissante.
  (d) On suppose que N est égal à 320 et on donne
  $$\Phi\left(\frac{7}{\sqrt{646}}\right) \approx 0,609\ ; \quad \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{645}}\right) \approx 0,592.$$
  Que peut-on en déduire pour $\mathbf{P}([X \geqslant N])$ si n est inférieur ou égal à 645, puis si n est supérieur ou égal à 646?

(6) Pour tout entier naturel non nul m, on considère la fonction g_m définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g_m(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}$$

(a) Montrer que la fonction dérivée de g_m est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g_m'(x) = -e^{-x} \frac{x^m}{m!}.$$

Montrer qu'elle vérifie la double inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad -e^{-m} \frac{m^m}{m!} \leqslant g_m'(x) \leqslant 0.$$

(b) En déduire que, si a et b sont deux réels vérifiant $0 < a < b$, on a

$$0 \leqslant g_m(a) - g_m(b) \leqslant (b-a) e^{-m} \frac{m^m}{m!}$$

(7) On suppose, dans cette question, que p est égal à $0,99$ et que n est strictement supérieur à N.
(a) Préciser la loi de la variable aléatoire $n - X$.
(b) On supposera, dans les prochains calculs, que la loi de la variable aléatoire $n - X$ peut être remplacée par la loi de Poisson de paramètre $0,01\,n$ dont on note F la fonction de répartition.
Que vaut alors $\mathbf{P}([X \geqslant N])$?
(c) Exprimer le nombre $F(n-N)$ à l'aide d'une fonction g_m particulière de la Question 6?
(d) On suppose que N est égal à 300.
Pour tout réel strictement positif α, on note F_α la fonction de répartition de la loi de Poisson de paramètre α et on donne:

$$F_3(2) \approx 0,423\ ; \quad F_3(3) \approx 0,647\ ; \quad e^{-3}\frac{3^3}{3!} \approx 0,224$$

Montrer que, si n est égal à 302, $\mathbf{P}([X \geqslant N])$ est au plus égal à $0,5$ et que, si n est égal à 303, $\mathbf{P}([X \geqslant N])$ est strictement supérieur à $0,6$.

Exercice 19. (D'après **ESSEC II 2013**) Pour tout entier n strictement positif, on se donne un réel p_n strictement positif et n variables aléatoires (X_n) indépendantes et suivant une loi de Bernoulli de paramètre p_n. On suppose que np_n a une limite finie strictement positive et on pose

$$\lim_{n \to +\infty} np_n = \lambda.$$

(1) Quelle est la loi de $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$?
(2) Soit k un entier naturel.
(a) Donner l'expression de $P(S_n = k)$ pour n supérieur ou égal à k.
(b) Que peut-on dire de la limite de p_n quand n tend vers l'infini? Étudier la limite de $(1-p_n)^n$ quand n tend versl'infini.
(c) Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} P(S_n = k) = e^{\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

(3) On pose $N_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.
(a) Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire N_n?
(b) Calculer

$$\lim_{n \to +\infty} P(N_n = 0).$$

(c) En déduire la limite en loi de la suite $(N_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 20. (D'après **EML 2014**)

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.

Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la variables X_n prend ses valeurs dans $[\![2; n+1]\!]$. Par exemple, si $n = 5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5,3,2,2,6,3, alors $X_5 = 4$. Pour tout k de $[\![1; n+1]\!]$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k-ième tirage.

Partie I : Étude du cas $n = 3$

(1) (a) Exprimer l'évènement $(X_3 = 4)$ à l'aide des variables N_1, N_2, N_3. En déduire $P(X_3 = 4)$.
(b) Montrer que $P(X_3 = 2) = 2/3$, et en déduire $P(X_3 = 3)$.

(2) Calculer l'espérance de X_3.

Partie II : Cas général $n \geq 2$

(3) Pour tout k de $[\![1; n+1]\!]$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.
(4) Calculer $P(X_n = n+1)$.
(5) Montrer, pour tout i de $[\![1; n]\!]$:
$$P_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \frac{n-i+1}{n}.$$
(6) En déduire une expression simple de $P(X_n = 2)$.
(7) Soit $k \in [\![2; n]\!]$. Justifier l'égalité d'événements suivante: $(X_n > k) = (N_1 > N_2 > \ldots > N_k)$. En déduire que
$$P(X_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}.$$
Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k = 0$ et pour $k = 1$.
(8) Exprimer, pour tout $k \in [\![2; n+1]\!]$, $P(X_n = k)$ à l'aide de $P(X_n > k-1)$ et de $P(X_n > k)$.
(9) En déduire que
$$\mathrm{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n} P(X_n > k).$$
Calculer ensuite $\mathrm{E}(X_n)$.
(10) Montrer que, pour tout $k \in [\![2; n+1]\!]$, $P(X_n = k) = \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k}$.

Partie III : Une convergence en loi

(11) Soit k un entier fixé supérieur ou égal à 2. Montrer
$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \frac{k-1}{k!}.$$
(12) Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 2} \frac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme.

On admet qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ telle que
$$\forall k \geq 2, \qquad P(Z = k) = \frac{k-1}{k!}.$$
(13) Montrer que Z admet une espérance et la calculer. Comparer $\mathrm{E}(Z)$ et
$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{E}(X_n).$$

7 Appendice: Table de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

$$\phi(t)(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \phi(-x) = 1 - \phi(x).$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000