ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Chapitre 17. Fonctions réelles d'une variable réelle IV- Intégrales généralisées

Lorsqu'une fonction f est continue sur un segment $[a;b]$, on va vu au cours du Cchapitre précédent comment définir l'intégrale

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Le but de ce second chapitre d'intégration est de définir, lorsque c'est possible, l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle du type $]-\infty, a]$, $[a, +\infty[$ ou $[-\infty, +\infty[$, a étant un réel. Ces notions permettront d'introduire, dans le dernier chapitre de l'année, la notion de *variable aléatoire à densité*.

1 Extension de la notion d'intégrale

1.1 Intégrale sur un intervalle du type $[a; +\infty[$ ou $]-\infty; a]$

Définition 1 (Convergence d'une intégrale impropre)**.**
Soit f une fonction continue sur l'intervalle semi-ouvert $[a\,;\,+\infty[$.

(1) On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est ***convergente*** *lorsque la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\dot{t}$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, et dans ce cas, on pose*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

(2) On définit de la même façon lorsque f est continue sur $]-\infty; a]$,

$$\int_{-\infty}^a f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)\mathrm{d}t.$$

☞ Étudier la nature d'une intégrale signifie déterminer si l'intégrale est convergente ou non.

Exercice 1. Déterminer la nature des intégrales suivantes

$$(i)\ \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t, \quad (ii)\ \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t}, \quad (iii)\ \int_e^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}.$$

1.2 Sur un intervalle du type $]-\infty;+\infty[$

Définition 2. *Soit f une fonction continue sur l'intervalle ouvert $\mathbb{R}$. Alors, on dit que l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

converge si et seulement si les intégrales

$$\int_{-\infty}^{c} f(t)\mathrm{d}t \qquad \textbf{\textit{et}} \qquad \int_{c}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

convergent pour tout réel $c \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{c} f(t)\mathrm{d}t + \int_{c}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t.$$

☞ Les deux types d'intégrales nouvellement définis peuvent naturellement être étendus aux fonctions continues par morceaux.

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Justifier de la convergence et calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t.$$

2 Sur un intervalle du type $]b;a]$

De la même manière que l'on étend la notion d'intégrale à des intervalles non bornés, on peut généraliser aussi la notion d'intervalle à des intervalles ouverts où la fonction que l'on vise à intégrer pourrait présenter une valeur interdite au bord.

Définition 3 (Convergence d'une intégrale impropre - 2)**.**
Soit f une fonction continue sur l'intervalle semi-ouvert $]a;b]$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est ***convergente*** *lorsque la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t)\d{t}$ admet une limite finie quand x tend vers a, et dans ce cas, on pose*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 3.

(1) Justifier la convergence et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$.

(2) Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$?

☞ Si l'intégrale à calculer présente les deux types de singularité, on la découpe en deux. Il est nécessaire d'avoir la convergence sur chacun des morceaux pour justifier de la convergence sur tout l'intervalle d'intégration.

Exercice 4. Déterminer les natures des intégrales

$$(i)\ \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}, \qquad (ii)\ \int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{d}t \qquad (iii)\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-1}{t\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

2.1 Techniques de calcul

Les propriétés sur les intégrales impropres (linéarité, positivité, croissance) découlent de celles sur les intégrales définies sur un segment par restriction de l'intervalle et passage à la limite.

✎ **Méthode.** (IPP ou un changement de variable sur des intégrales impropres.)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;+\infty[$ dont l'intégrale impropre sur le même intervalle converge. Pour **calculer** cette intégrale impropre en intégrant par partie ou par changement de variable, on suit les étapes suivantes.

(1) On **restreint l'intervalle d'intégration** à $[a\,;x]$ avec $x \geq a$.
(2) On effectue une intégration par parties ou un changement de variable classique sur l'intégrale définie
$$\int_a^x f(t)\mathrm{t}.$$
(3) On passe à la limite quand x vers $+\infty$.

⚠ On ne fera donc pas d'IPP directement sur un intervalle du type $[a;+\infty[$ ou $]-\infty;+\infty[$.

Exercice 5. À l'aide d'une IPP, justifier la convergence et calculer l'intégrale
$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Exercice 6. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$
$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t.$$

(1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est bien convergente.
(2) Calculer I_0.
(3) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $I_n = nI_{n-1}$. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.
(4) À l'aide du changement de variable $s = \sqrt{t}$, justifier la convergence et calculer l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

3 Critères de convergence

3.1 Intégrales de Riemann

Les intégrales de Riemann sont des intégrales de référence que l'on peut utiliser comme du cours.

Théorème 1 (Convergence des intégrales de Riemann)**.** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors,*

(1) Sur l'intervalle $[1;+\infty[$,
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \textit{ converge } \iff \alpha > 1.$$
(2) Sur l'intervalle $]0;1]$,
$$\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \textit{ converge } \iff \alpha < 1.$$

⚠ Attention! La convergence des intégrales de Riemann dépend de l'intervalle d'intégration. On fera donc bien attention à ne pas confondre les deux critères!

3.2 Critère de comparaison par inégalité

Théorème 2. *Soient f et g deux fonctions continues et **positives** sur $[a\,;+\infty[$ telles que*

$$\forall t \in [a\,;+\infty[, \qquad 0 \leq f(t) \leq g(t).$$

Alors,

$$(1) \qquad \int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ converge;}$$

$$(2) \qquad \int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ diverge} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t \text{ diverge.}$$

Exercice 7. Déterminer la nature des intégrales

$$(i) \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t, \quad (ii) \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t, \quad (iii) \int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln(t)}}\mathrm{d}t.$$

3.3 Fonctions de signe quelconque

Définition 4 (Convergence absolue)**.**
*Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a;+\infty[$. On dit que l'intégrale de f sur $[a;+\infty[$ est **absolument convergente** si l'intégrale de $|f|$ sur me même intervalle converge.*

Théorème 3. *Si l'intégrale de f sur $[a;+\infty[$ converge absolument, alors elle est convergente*

$$\int_a^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

⚠ **La réciproque est fausse!** (L'intégrale peut être convergente sans être absolument convergente.)

4 Autres exercices

Exercice 8. (D'après **EML 2017**) On considère la fonction $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = e^x - e\ln(x).$$

(1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ converge et la calculer.

(2) L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge-t-elle?

(3) (a) Montrer que, pour tout $x \in [2;+\infty[$, $2\ln(x) \leq \dfrac{e^x}{3}$.

  (b) Montrer alors la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$.

Exercice 9. (Gaussienne) Dans cet exercice, on admet la valeur de l'intégrale (qu'on sait être convergente)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}.$$

(1) Calculer, éventuellement à l'aide d'intégrations par parties, les intégrales

$$(i) \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}\mathrm{d}t, \quad (ii) \int_{-\infty}^{+\infty} t^2e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

(2) Soient μ et σ deux paramètres réels fixés. Calculer, via un changement de variable affine, les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2f(t)\mathrm{d}t, \qquad \text{où} \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Exercice 10. Pour $n \geq 1$ entier, on définit sur $]0;+\infty[$ la fonction
$$f_n(x) = \frac{x\ln(x)}{(1+x^2)^n}.$$
(1) Montrer que f_n se prolonge par continuité à $[0;+\infty[$.
(2) Étudier la convergence des intégrales
$$\int_0^{+\infty} f_1(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \int_0^{+\infty} f_2(t)\mathrm{d}t.$$
(3) Que dire pour $n \geq 2$?

Exercice 11. Soit $g : [1;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$\int_1^{+\infty} g(t)\mathrm{d}t \text{ converge } \implies \int_1^{+\infty} \frac{g(t)}{t}\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

Exercice 12. (D'après **ECRICOME 2010**.)

On considère la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$\phi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) = \frac{1}{x}.$$
(1) Montrer que l'équation $\phi(x) = 1$ admet une unique solution α et que $1/3 < \alpha < 1/2$.
(2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2(x+1)}, & \text{si } x > \alpha, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$
Montrer que l'intégrale de f sur $]-\infty;+\infty[$ est convergente et que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1.$$

Exercice 13. (D'après **EDHEC 2004**.)

Le but de cet exercice est de calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$ et on a, en particulier, $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+t}dt$.
(1) Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier lexistence de u_n.
(2) Calculer u_0 et u_1.
(3) (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
  (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ln(2)$.
  (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
(4) (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln(2) - u_n$ sous la forme dune intégrale.
  (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(2) - u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
  (c) Donner la limite de la suite (u_n).
(5) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$.
  (a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n.
  (b) Montrer que : $\forall n \geq 2,\ 0 \leq v_n \leq \dfrac{1}{n-1}$.
  (c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n$, puis donner la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$.

Exercice 14. (D'après **EML 2016**, Extrait du DM 20, Été 2016)
On considère la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}.$$

(1) Montrer que f est paire.
(2) Montrer que f est continue et positive sur $\mathbb{R}$.
(3) Montrer la convergence, puis calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t.$$

(4) Montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_{0}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 15. (D'après **ESC 2002**)

On considère, pour n entier naturel non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f_n(x) = \frac{n\ln x}{n+1+nx^2}.$$

On définit également sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction h par

$$h(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}.$$

(1) Montrer que les fonctions f_n et h sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier leur signe.
(2) (a) Montrer la convergence des deux intégrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x.$$

Dans toute la suite de l'exercice on note alors K l'intégrale impropre

$$K = \int_1^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x.$$

(3) (a) Montrer, grâce au changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$ que

$$K = -\int_0^1 h(u)\mathrm{d}u.$$

(b) En déduire que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} |h(x)|\,\mathrm{d}x$ converge et est égale à $2K$.

(c) En déduire également que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.

(4) (a) Montrer que pour tout réel x strictement positif,

$$|f_n(x)| \leqslant |h(x)|.$$

(b) En déduire la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

(c) Montrer que pour tout réel x strictement positif,

$$h(x) - f_n(x) = \frac{h(x)}{n+1+nx^2}.$$

(d) En déduire successivement

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} (h(x) - f_n(x))\mathrm{d}x \leqslant \frac{K}{n+1},$$

puis

$$-\frac{K}{n+1} \quad \leqslant \int_0^1 (h(x) - f_n(x))\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

(e) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx = 0.$$

Exercice 16. (D'après **HEC 2010**)

(1) Justifier la convergence et déterminer la valeur de $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la convergence de l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t.$$

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

Exercice 17. (D'après **HEC 2018**)

(1) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Justifier que l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$$

est convergente si seulement si $x > 0$.

(b) Pour tout réel ε tel que $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$, établir à l'aide d'un changement de variable affine, l'égalité

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ dt = \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} t^{y-1}(1-t)^{x-1}\mathrm{d}t$$

(c) En déduire que l'intégrale

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$$

est convergente si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

Dans toute la suite, on pose, pour $x, y > 0$,

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t.$$

(2) Soient x et y des réels strictement positifs.

(a) À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation

$$B(x+1, y) = \frac{x}{y} \times B(x, y+1).$$

(b) En déduire l'égalité

$$B(x, y+1) = \frac{y}{x+y} \times B(x, y).$$