
Chapitre 5. Ensembles, Applications & Dénom- brement

1 Ensembles

1.1 Généralités: ensembles et sous-ensembles

Définition 1. Si u_1, u_2, \dots, u_p (p étant un entier ≥ 1) sont des objets mathématiques quelconques (par exemple des nombres réels mais éventuellement des fonctions ou des vecteurs...), alors on peut former l'**ensemble** :

$$E = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}.$$

On dit alors que chaque u_i (pour $1 \leq i \leq p$) est un **élément** de E , ou que u_i appartient à E , et on écrit :

$$u_i \in E.$$

Si un objet x n'est pas un élément de l'ensemble E , on note $x \notin E$.

Exemple. Certains ensembles sont importants car on les utilise très souvent. On en a déjà introduits certains. Par exemple:

- l'ensemble vide, noté \emptyset . Il ne contient aucun élément;
- l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ des entiers naturels;
- l'ensemble \mathbb{R} des réels, dont $0, -1, \sqrt{2}, e$ sont des éléments.

Mais on verra également dans les prochains chapitres que d'autres ensembles seront utilisés (et importants) comme

- l'ensemble $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et m colonnes;
- l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions infiniment dérivables sur \mathbb{R} ...

Dans les deux chapitres précédents, nous avons étudié les *suites réelles*, on peut alors introduire une notation pour l'ensemble de tels objets. Ainsi, il est courant de noter $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

⚠ Il est tout à fait possible de considérer un ensemble d'ensembles, comme

$$E = \{\{1; 2\}; \{1\}; \mathbb{N}\}.$$

Ici, les éléments de E sont eux-mêmes des ensembles. On fera donc attention à bien identifier le contexte dans lequel on se trouve.

☞ Deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments.

Remarque 1. L'ordre des éléments dans un ensemble, et leurs éventuelles répétitions n'importent pas. Par exemple:

$$\{1; 2\} = \{2; 1\} = \{1; 1; 2\}.$$

Définition 2. Le **cardinal** d'un ensemble E est le nombre d'éléments qui le composent. On le note $\text{card}(E)$ ou $\#E$. Il peut être fini ou infini.

Un ensemble de cardinal 1 s'appelle un **singleton** et un ensemble de cardinal 2 une **paire**.

Définition 3. Soient E et F deux ensembles. On dit que F est **inclus** dans E , ce qui s'écrit $F \subset E$, lorsque tout élément de F est aussi un élément de E :

$$(F \subset E) \iff (\forall x \in F, x \in E).$$

Lorsque F est inclus dans E , on dit que F est un **sous-ensemble** (ou une **partie**) de E .

Exercice 1. Écrire, à l'aide de quantificateurs, le fait qu'un ensemble F **ne soit pas inclus** dans un ensemble E .

⚠ Attention. L'ensemble vide est un sous-ensemble de tout ensemble.

Exercice 2. Vrai ou Faux?

- (i) $\{1, 1\} = \{1\}$
- (ii) $2 \in \{\{2\}, 3, \{\{4\}\}, \emptyset\}$
- (iii) $\{1\} = \{\{1\}\}$
- (iv) $3 \in \emptyset$
- (v) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
- (vi) $\{1\} \subset \{\{1\}\}$
- (vii) $\emptyset \subset \{1\}$
- (viii) $\{\{\{3\}\}\}$ a un élément
- (ix) $\{n \in \mathbb{N}, 82 \leq n \leq 99 \text{ et } \exists k \in \mathbb{N}, n = k^2\} = \emptyset$

✎ Méthode. (Inclusion de deux ensembles).

Pour montrer qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B , on fixe un élément quelconque x de A et on montre qu'il appartient aussi à B .

Exercice 3. Montrer que $A \subset B$, où

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x \leq 4\} \quad \text{et} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - x^2 - x - 5 \geq 0\}.$$

Proposition 1. Soient A, B et C trois ensembles. Alors

- (i) $(A \subset B \text{ et } B \subset C) \implies (A \subset C)$.
- (ii) $(A \subset B \text{ et } B \subset A) \iff (A = B)$.

La proposition précédente permet en particulier d'établir la méthode suivante, pour montrer que deux ensembles sont égaux.

✎ Méthode. (Égalité de deux ensembles)

Pour montrer que deux ensembles A et B sont égaux, on peut procéder comme suit:

- Ou bien on peut écrire **en extension** (c'est à dire en donnant tous leurs éléments) les deux ensembles et on vérifie que ce sont les mêmes;
- Ou bien on procède par **double inclusion**:

$$(A = B) \iff (A \subset B \text{ et } B \subset A).$$

C'est à dire qu'on commence par montrer que $A \subset B$ et ensuite, on montre que $B \subset A$.

Remarque 2. (Cardinal et Inclusion)

Il est clair que si $F \subset E$, alors $\text{card}(F) \leq \text{card}(E)$. On peut en déduire alors le résultat suivant, dont la démonstration est un petit exercice facile (mais instructif): si E et F sont deux ensembles avec un nombre fini d'éléments avec $F \subset E$ et si $\text{card}(F) = \text{card}(E)$, alors $E = F$.

Définition 4. Si E est un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . Les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont donc les parties de E .

Exemple. Prenons $E = \{1; 2\}$. Cet ensemble, qui a deux éléments, admet quatre sous-ensembles qui sont: \emptyset (qui ne contient pas d'élément), $\{1\}$ et $\{2\}$ (qui contiennent tous deux un élément) et E lui-même. Ainsi, on écrira

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{1; 2\}\}.$$

Exercice 4. Expliciter les ensembles suivants :

- (i) $\mathcal{P}(\emptyset)$
- (ii) $\mathcal{P}(\{5\})$
- (iii) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$
- (iv) $\mathcal{P}(\{\{1\}\})$
- (v) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$

1.2 Opérations sur les ensembles

Définition 5. Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Alors, on peut considérer les éléments de A qui ne sont pas dans B , cet ensemble se note $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$ et se lit "A privé de B".

Définition 6. Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

- On appelle **intersection** de A et B , et on note $A \cap B$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B .
- On appelle **union** de A et B , et on note $A \cup B$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B .

Deux ensembles A et B tels que $A \cap B = \emptyset$ sont dits **disjoints**.

⚠ Attention. Le "ou" de la définition de l'union est un "ou" **inclusif**. C'est à dire que pour construire $A \cup B$, on prend les éléments qui sont dans A , dans B et aussi ceux qui sont dans les deux! En particulier $A \cap B \subset A \cup B$.

Proposition 2. Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Les propriétés suivantes sont toujours vraies:

- (1) ... relatives à l'intersection
 - $A \cap B = B \cap A$
 - $A \cap A = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$
 - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
- (2) ... relatives à l'union
 - $A \cup B = B \cup A$
 - $A \cup A = A$ et $A \cup \emptyset = A$
 - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
- (3) ... relatives à intersection et l'union
 - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Exercice 5. Pour $A, B, C, D \in \mathcal{P}(E)$, simplifier l'expression

$$(A \cap B) \cup (C \cap D).$$

Proposition 3. (Formule du crible) Soient E un ensemble fini et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Alors,

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

et

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(B \cap C) - \text{card}(C \cap A) + \text{card}(A \cap B \cap C).$$

Définition 7. Soient E et I deux ensembles, et $(A_i)_{i \in I}$ une **famille** de sous-ensembles de E indexée par I (c'est à dire que, pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{P}(E)$). On peut alors construire la réunion et l'intersection de tous les A_i :

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \iff \exists i \in I, x \in A_i$$

et

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I, x \in A_i.$$

Exemple. Considérons la famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-ensembles de \mathbb{R} , définie par $A_n = [-n; n]$ (la famille étant indexée par \mathbb{N} , on parlera plutôt de suite d'ensembles). On a par exemple $A_0 = \{0\}$, $A_1 = [-1; 1]$, etc... Il est alors facile de voir que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}.$$

Pour montrer chacune de ces égalités d'ensembles, on procède par double inclusion. Il est clair que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset \mathbb{R}$. Prenons maintenant $x \in \mathbb{R}$ et montrons que $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Il suffit de trouver un entier naturel qui soit plus grand que x . Prenons alors $N_x = \lfloor x \rfloor + 1$. On a bien $x \in A_{N_x}$ et donc x est bien dans $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Pour l'autre égalité, il est également clair que $\{0\} = A_0 \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Soit alors $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Cela signifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in A_n$ ou encore $-n \leq x \leq n$. La seule possibilité est donc que x soit égal à 0 et donc $x \in \{0\}$.

Exercice 6. Déterminer les intersections et réunions d'ensembles suivants:

$$(i) A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n} \right]; \quad (ii) B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n} \right[; \quad (iii) C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}; +\infty \right[; \quad (iv) \bigcup_{a \in \mathbb{R}^*} \left] \frac{1}{a}; +\infty \right[.$$

Définition 8. Soient E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$. On appelle **complémentaire de A dans E** l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A :

$$\mathcal{C}_E(A) = \{x \in E : x \notin A\} = E \setminus A.$$

⚠ Attention. La notion de complémentaire d'un ensemble A dépend totalement de l'ensemble E . Lorsque le contexte est clair (**et uniquement dans ce cas**), on peut alléger la notation et la terminologie en parlant simplement de complémentaire de A et en le notant \overline{A} .

Proposition 4. Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Alors

- $\overline{\overline{E}} = \emptyset$; $\overline{\emptyset} = E$; $\overline{\overline{A}} = A$.
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$; $A \cup \overline{A} = E$.
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Définition 9. Soient E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une familles de parties non vides de E . On dit que $(A_i)_{i \in I}$ forme une **partition** de E si:

$$\begin{cases} \bigcup_{i \in I} A_i = E \\ \forall i \in I, \forall j \in I, \quad (i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset) \end{cases}$$

Exercice 7. Montrer que la famille (A_n) définie, pour $n \in \mathbb{Z}$ par $A_n = [n; n + 1[$ forme une partition de \mathbb{R} .

Définition 10. On appelle **produit cartésien** de n ensembles E_1, E_2, \dots, E_n l'ensemble des n -uplets (x_1, x_2, \dots, x_n) tels que $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \dots, x_n \in E_n$.

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in E_i, i = 1, \dots, n\}.$$

☞ Le produit cartésien de n ensembles égaux à E se note simplement E^n .

Exercice 8. À l'aide d'un dessin, exprimer simplement le produit $[0; 2]^2 \cap [1; 3]^2$.

2 Applications

2.1 Vocabulaire

La définition suivante a déjà été introduite dans le premier chapitre.

Définition 11. Une **application** f est la donnée d'un ensemble E , appelé **ensemble de départ**, d'un ensemble F , appelé **ensemble d'arrivée**, et pour chaque élément x de E , d'un unique élément noté $f(x)$.

On dit que $f(x)$ est l'**image** de x par f . De plus, si y est un élément de F et que x est un élément de E qui vérifie $f(x) = y$, alors x est appelé **antécédent** de y par f .

Une application f de E dans F se note ainsi:

$$\begin{aligned} f : E &\rightarrow F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Définition 12. (Application identité)

Soit E un ensemble. L'application définie sur E et qui à tout élément $x \in E$ associe le même élément x est appelée **application identité** (ou tout simplement **identité**) de E . On la note

$$\begin{aligned} \text{Id}_E : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

On introduit également les notations et la terminologie suivante. Il est capital de bien faire la distinction entre élément et ensemble et de manipuler tous les objets avec rigueur (et précaution).

Définition 13. (Image directe et pré-image)

Soient f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$.

- On appelle **image directe** de A par f l'ensemble des images par f des éléments de A . On note

$$f(A) = \{y \in F : \exists x \in A, y = f(x)\}.$$

- On appelle **pré-image** de B par f l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est dans B . On note

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}.$$

⚠ Attention. Il est capital d'avoir à l'esprit que les ensembles définis ci-dessus sont des ensembles. La notation de la pré-image est une notation et n'a rien à voir avec la bijection réciproque f^{-1} (qui sera définie ci-après) et qui peut tout à fait ne pas exister. On fera de plus bien la différence entre $f(x)$ et $f(\{x\})$ qui ne sont pas des objets du même type!

Exercice 9.

- (1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{2x} + e^x$.
 - (a) Déterminer $f(\{0\})$.
 - (b) Déterminer $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$.
 - (c) Montrer que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^*$. A-t-on égalité? Justifier.
- (2) Soit $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $(n, m) \mapsto n(m - 1)$.
 - (a) Déterminer $g(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ et $g^{-1}(\{0\})$.

Définition 14. Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ deux applications. La **composée** de f par g est l'application notée $g \circ f$ définie sur E et à valeurs dans G qui à un élément $x \in E$ associe $g(f(x))$.

⚠ Attention. $f \circ g \neq g \circ f$!

Exercice 10. Dans chacun des cas, expliciter $g \circ f$.

- (1) $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(1+x)$;
- (2) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x+y$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (t, t+1, t^2)$.

2.2 Injections, Surjections, Bijections

Définition 15. Soit f une application de E dans F . On dit que:

- f est **injective** si tout élément de F possède au plus un antécédent par f :

$$\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2.$$

- f est **surjective** si tout élément de F possède au moins un antécédent par f :

$$\forall y \in F, \exists x \in E : f(x) = y.$$

- f est **bijjective** si tout élément F possède un unique antécédent par f :

$$\forall y \in F, \exists! x \in E : f(x) = y.$$

L'application de F vers E qui à y associe x s'appelle la **bijection réciproque** de f . On la note f^{-1} .

Remarque 3. On peut, à partir de la définition, remarquer les propriétés suivantes:

- (1) L'application identité de tout ensemble E est toujours bijective.
- (2) Une application f est bijective si elle est à la fois injective **et** surjective.
- (3) Si $f : E \rightarrow F$ est bijective alors

$$\forall x \in E, \forall y \in F, (f(x) = y) \iff (x = f^{-1}(y)).$$

- (4) Si f est bijective de E dans F , on dira que f réalise une bijection de E sur F . Il est alors clair que f^{-1} réalise quant à elle une bijection de F sur E . De plus,

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

- (5) Si $f : E \rightarrow F$ est bijective alors

$$f \circ f^{-1} = \text{Id}_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \text{Id}_E.$$


- (6) Si $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$, on peut dire que f réalise une bijection de A sur B si et seulement si

- (i) $f(A) = B$;

- (ii) tout élément de B possède un unique antécédent x **dans** A .

Exemple. L'exponentielle est la bijection réciproque du logarithme népérien:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}, (\ln(x) = y) \iff (x = e^y).$$

 **Méthode.** Pour montrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ est bijective, on peut parfois montrer que tout élément de l'espace d'arrivée possède un unique antécédent par f dans l'ensemble de départ de manière explicite (c'est à dire qu'on choisit $y \in F$ arbitraire et on explicite l'unique x (qui dépendra de y) tel que $f(x) = y$) ou bien (le plus souvent) on montre en deux temps qu'elle est injective et surjective.

- Pour la surjectivité: on prend un élément quelconque y dans l'ensemble d'arrivée et on montre qu'il existe un élément x dans l'ensemble de départ tel que $f(x) = y$.
- Pour l'injectivité: on part de deux éléments quelconques x et y de l'ensemble de départ vérifiant $f(x) = f(y)$ et on montre qu'on a nécessairement $x = y$.

Naturellement, pour infirmer l'une des deux propriétés, on peut fournir un contre-exemple.

Exercice 11. Les applications suivantes sont-elles injectives? surjectives? bijectives? Dans le cas d'une bijection, expliciter la bijection réciproque.

- (1) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 1$.
- (2) $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2, n \mapsto (n, (n+1)^2)$.

(3) $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par

$$h(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2}, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Proposition 5. (Bijections et ensembles finis) Soient E et F deux ensembles finis et f une application de E dans F .

- (1) Si f est bijective, alors $\text{card}(E) = \text{card}(F)$.
- (2) Si $\text{card}(E) = \text{card}(F)$ **et si** f injective, alors f est bijective.
- (3) Si $\text{card}(E) = \text{card}(F)$ **et si** f surjective, alors f est bijective.

Proposition 6. (Composée de bijections) Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux bijections. Alors $g \circ f$ est encore une bijection (de E sur G) et on a

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

3 Dénombrement

Dénombrer consiste à déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble donné (ou autrement dit, le nombre de possibilités d'une situation donnée). Pour ce faire, nous allons introduire plusieurs outils qui permettront d'obtenir ce décompte.

Tous les ensembles considérés dans cette section sont des **ensembles finis**. On commence par la proposition suivante.

Proposition 7. Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et m . Alors, $\text{card}(E \times F) = n \times m$. En particulier $\text{card}(E^d) = n^d$.

On en déduit le résultat suivant, extrêmement utile:

Proposition 8. Il y a n^d façons de choisir, en tenant compte de l'ordre (et en acceptant les répétitions), d fois un élément parmi n .

Exemple. Il y a 9^7 nombres à 7 chiffres qui ne comportent aucun 1. En effet, on doit choisir 7 fois consécutives un chiffre parmi 9 qui sont 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

3.1 Permutations

Définition 16. Soit E un ensemble fini. On appelle **permutation** de E toute bijection de E dans E .

Exemple. Considérons $E = \{1; 2; 3\}$. L'application $\sigma : E \rightarrow E$ telle que $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3$ et $\sigma(3) = 1$ est bien une bijection de E dans lui-même, c'est donc une permutation de E . On la note $\sigma = (1, 2, 3)$.

Proposition 9. Si $\text{card}(E) = n$, alors le nombre de permutations de E est $n!$.

Exercice 12. Déterminer toutes les permutations de $E = \{1; 2; 3\}$.

☞ On utilise les permutations dans les problèmes où l'on veut **ordonner** tous les éléments d'un ensemble (sans répétition).

Exemple. Le nombre de façons de placer 24 élèves de CPGE 1 sur les 24 chaises de la salle est le nombre de façons de permuter les 24 élèves sur les 24 chaises, c'est à dire $24!$ (ce qui est un nombre très grand!).

Exercice 13. Les 28 tomes d'une encyclopédie sont rangés sur une étagère.

- (1) Quel est le nombre de rangements possibles?
- (2) Quel est le nombre de rangements pour lesquels les tomes I et II apparaissent côte à côte et dans cet ordre sur l'étagère?
- (3) Quel est le nombre de rangements pour lesquels les p premiers tomes ($1 \leq p \leq 28$) apparaissent côte à côte et dans le bon ordre?

3.2 Arrangements

Définition 17. Une *arrangement* de E est une disposition ordonnée d'un certain nombre d'éléments de E .

Proposition 10. Si $\text{card}(E) = n$ et si $1 \leq k \leq n$, le nombre d'arrangements de k éléments de E se note A_n^k et vaut

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

☞ On utilise les arrangements dans les problèmes où l'on veut **ordonner** k éléments d'un ensemble (sans répétition).

Exemple. Le nombre de "mots" de trois lettres formés avec les lettres du mot "MATHS" est

$$A_5^3 = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60.$$

Exercice 14. Douze étudiants participent à un concours de mathématiques. Combien y a-t-il de "podiums" possibles?

3.3 Combinaisons et coefficients binomiaux

Définition 18. On appelle k -*combinaison* de E toute partie de E à k éléments. Le nombre de combinaisons de k éléments d'un ensemble à n éléments se note $\binom{n}{k}$.

☞ L'ordre des éléments d'une combinaison n'a pas d'importance.

Exemple. Prenons à nouveau $E = \{1; 2; 3\}$.

- Les combinaisons de 2 éléments de E sont $\{1; 2\}$, $\{1; 3\}$ et $\{2; 3\}$. On peut donc conclure que

$$\binom{3}{2} = 3.$$

- $\{2; 3\}$ et $\{3; 2\}$ sont deux combinaisons identiques.

Proposition 11. Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés **coefficients binomiaux** (cette terminologie sera justifiée dans un chapitre suivant). De plus:

- (1) Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est aussi égal au nombre de façon de choisir k objets distincts parmi n objets donnés.
- (2) Dans un *arbre binaire* (succès-échec), le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est égal au nombre de chemins sur lesquels on obtient exactement k succès (et $n - k$ échecs) lors de n répétitions d'une expérience aléatoire de Bernoulli (ce qu'on reverra naturellement dans un prochain chapitre sur les probabilités).

Il apparaît alors important de trouver comment calculer explicitement chaque coefficient binomial en fonction de n et k . Toutes les formules suivantes sont à connaître et comprendre parfaitement, et sont capitales pour la suite, dans différents cadres d'application.

Proposition 12. (Quelques coefficients binomiaux particuliers) Pour tout entier n on a

$$\binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n}{1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Proposition 13. (Formule du coefficient binomial) Soient n un entier et $0 \leq k \leq n$. Alors,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Il n'est pas difficile d'obtenir cette formule à partir de celle sur le nombre d'arrangement: l'ordre n'intervenant pas pour les combinaisons (contrairement aux arrangements), si les k éléments d'une combinaison sont choisis, il y a $k!$ permutations de ces éléments pour obtenir tous les arrangements possibles. Ainsi,

$$k! \binom{n}{k} = A_n^k \iff \binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Exemple. On retrouve bien $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2! \times 1!} = \frac{6}{2} = 3$.

La formule précédente permet en particulier d'établir des relations bien pratiques:

Proposition 14. Soient n un entier et $0 \leq k \leq n$. Alors,

(Symétrie)
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

(Triangle de Pascal)
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Exercice 15. Combien de mains de quatre cartes à jouer (choisies parmi 32) existe-t-il? Parmi ces mains, combien contiennent la dame de coeur?

Exercice 16. Un ensemble E possède exactement 55 parties à deux éléments. Quel est le cardinal de cet ensemble?

Exercice 17.

(1) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ et en utilisant la formule du *triangle de Pascal*, que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{et que} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

3.4 Méthodologie du dénombrement

On conclue ce chapitre par un "point méthode" pour savoir comment dénombrer les possibilités offertes par une situation donnée, à l'aide des outils précédemment introduits.

On décompose la situation:

- Si la situation à étudier peut se décrire en plusieurs cas **disjoints** (à l'aide par exemple d'un "ou bien" ou "soit"), alors le dénombrement peut s'obtenir en **ajoutant** les dénombrement de chacun des cas.
- Si la situation à étudier peut être décrite par plusieurs **étapes successives** ("puis", "et", ...) alors le dénombrement peut s'obtenir en **multipliant** les dénombrements de chacune des étapes.
- Il peut être parfois beaucoup plus simple de dénombrer l'ensemble complémentaire.

On dénombre chaque composante de la situation décomposée:

- Si l'ordre intervient et si les répétitions sont autorisées, il y a n^d façons de choisir d fois successives un élément parmi n .
- Si l'ordre intervient mais que les répétitions ne sont pas autorisées, il y a A_n^d façons de ranger d éléments parmi n .
- Si l'ordre n'intervient pas et que les répétitions ne sont pas autorisées, il y a $\binom{n}{d}$ façons de choisir d éléments parmi n .

Exercice 18. On tire successivement, avec remise, 5 boules dans une urne qui en contient 3 noires et 4 blanches. Combien y a-t-il de tirages:

- (1) en tout?
- (2) comportant 3 noires et 2 blanches?
- (3) comportant au plus une noire?
- (4) comportant au moins deux noires?

 **Le principe des bergers.** Pour compter le nombre de moutons de son troupeau, un berger compte toutes les pattes et divise le total par 4.

Exemple. Si on veut dénombrer le nombre d'anagrammes du "mot" ELEVEN TWO¹, on se rend compte qu'il devient difficile de tenir compte du fait que ce mot contient trois fois la lettre E, qui ne sont a priori pas différenciables. On va donc dans un premier temps dénombrer les anagrammes du même mot pour lequel on va différencier les lettres E, en les nommant E₁, E₂ et E₃. Le mot E₁LE₂VE₃N TWO admet 9! anagrammes (car il se compose de 9 caractères). Or, toute permutation des trois E (il y en a 3!) ne change finalement pas le mot. Finalement, il y a $\frac{9!}{3!}$ anagrammes de ELEVEN TWO.

Exercice 19. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot AVADAKEDAVRA ?

4 La formule du binôme

On a obtenu, à l'Exercice 17, deux formules faisant intervenir les coefficients binomiaux qui sont en fait des cas particuliers d'un résultat, appelé *formule du binôme*, qui s'avère extrêmement important (notamment dans le cadre des *variables aléatoires discrètes*) et que l'on énonce (et démontre) ici.

Théorème 1 (Formule du binôme). Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemple. Pour $n = 2$, on retrouve la fameuse identité remarquable:

$$(a + b)^2 = \binom{2}{0} a^0 b^2 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^2 b^0 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Remarque 4. Il est important d'avoir à l'esprit que la formule est *symétrique*:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Cette formule étant démontrée, on peut retrouver plusieurs résultats déjà rencontrés:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1 + 1)^n = 2^n \\ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} &= (1 + (-1))^n = 0 \quad (\text{pour } n \geq 1) \end{aligned}$$

¹On remarquera avec amusement qu'un des anagrammes de ELEVEN TWO est en fait TWELVE ONE (et les deux sommes font 13...).

et en énoncer des nouveaux, qui seront très utiles dans la suite

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1 \quad (p \in]0; 1[)$$

Exercice 20. Soit $x \in \mathbb{R}$. Développer $(1+x)^6$ puis $(1-x)^6$.

Exercice 21. Soient a, b et c trois réels. Quel est le coefficient devant $a^2 b^4 c$ dans le développement de $(a+b+c)^7$?

Exercice 22. Utiliser la formule du binôme pour montrer que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 23. Calculer

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i}.$$

Exercice 24 (Moments de la loi binomiale). Soit $p \in]0; 1[$. On pose

$$E_n(p) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{et} \quad M_n(p) = \sum_{k=1}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

- (1) Montrer que $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$.
- (2) En déduire que $E_n(p) = np$.
- (3) Montrer, d'une manière analogue, que $M_n(p) = n(n-1)p^2$.

5 Autres exercices

Exercice 25. Soient E et F deux ensembles et $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$. Montrer, qu'en général,

$$\mathcal{C}_{E \times F} A \times B \neq \mathcal{C}_E A \times \mathcal{C}_F B.$$

Exercice 26. Montrer que les deux ensembles suivants sont égaux et les représenter graphiquement

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x - y = 1\} \quad \text{et} \quad B = \{(t+1, 4t+3) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 27. (Composition itérée)

Si $f : E \rightarrow E$ est une application, on peut composer f avec elle-même. En répétant ce processus, on peut le faire n fois. Plus précisément, on note, pour $n \geq 1$

$$f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f \quad (n \text{ fois}).$$

- (1) Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x$. Que vaut f^n ?
- (2) Soit alors $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x/(x+1)$. Expliciter f^2 puis f^3 . Conjecturer puis démontrer, par récurrence, une formule pour f^n .

Exercice 28. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^{-x}}.$$

Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque f^{-1} .

Exercice 29. Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. Montrer que:

- (1) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- (2) Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 30. Calculer les coefficients binomiaux suivants:

$$a = \binom{4}{2}; \quad b = \binom{6}{2}; \quad c = \binom{6}{4}; \quad d = \binom{6}{3};$$

$$e = \binom{7}{3}; \quad f = \binom{15}{2}; \quad g = \binom{15}{13}.$$

Exercice 31 (Manipulation de la factorielle).

- (1) Factoriser $n! - 2(n-2)!$.
- (2) Calculer

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{n}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2} \text{ et } \binom{n}{n-2}$$

- (3) Simplifier $A_n = \frac{n!}{(n-2)!}$.

Exercice 32 (Vrai ou Faux?).

- (1) Pour tout entier naturel n , $(2n)! = 2n!$.
- (2) Pour tout entier naturel n , $(2n+1)!$ est impair.
- (3) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, $n!$ est pair.
- (4) Pour tout entier naturel n , $(n+1)! - n! = n \times n!$.
- (5) Pour tout entier naturel $n \geq 4$,

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{12}.$$

- (6) Pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$\frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1).$$

Exercice 33 (Petits dénombrements faciles).

- (1) Déterminer le nombre d'anagrammes de chacun des mots suivants :

MALIN, CLASSE, ABRACADABRANTE

- (2) Combien de nombres à 9 chiffres peut-on former avec les chiffres : 1,1,1,2,2,3,3,3,7?
- (3) De combien de façons peut-on répartir 18 personnes en 4 groupes comprenant respectivement 5, 4, 3 et 6 personnes?

Exercice 34 (Formule de Van der Monde).

Une assemblée est composée de n hommes et de p femmes. On forme un comité comprenant a personnes ($0 < a \leq n+p$).

- (1) Combien y a-t-il de comités comprenant k hommes et $a-k$ femmes?
- (2) En déduire que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{p}{a-k} = \binom{n+p}{a},$$

où on adopte la convention selon laquelle $\binom{j}{i} = 0$ si $i > j$ ou si $i < 0$.

- (3) En déduire que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

- (4) En déduire aussi que

$$\sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k}^2 = n(n-1) \binom{2n-2}{n-2}.$$

Exercice 35.

- (1) Montrer que pour tout
- $n > 0$
- ,

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{n^n}{n!}, \quad \text{où } P_n = \prod_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

- (2) Calculer pour tout entier
- $n > 0$
- ,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}}.$$

Exercice 36 (Problème des rencontres).

Soit E un ensemble à n éléments. On appelle *dérangement* toute permutation de E ne laissant **aucun** élément invariant. On note D_n le nombre de dérangements de E .

- (1) Que vaut nécessairement D_1 ? Que vaut D_2 ?
 (2) Soit $k \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$. Combien y a-t-il, en fonction de D_k de permutations de E laissant invariants exactement k éléments? En déduire que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k = n!.$$

- (3) À l'aide de la formule précédente, déterminer D_3 , D_4 et D_5 .
 (4) Cinq couples de danseurs se rendent à un bal masqué. À l'arrivée, on sépare les hommes et les femmes, on numérote les femmes de 1 à 5, et les hommes de 1 à 5. On les fait ensuite s'élaner sur une piste, chaque homme choisissant au hasard une femme pour partenaire.
 (a) À chaque numéro de femme, on associe le numéro de l'homme avec lequel elle danse. Combien y a-t-il d'associations possibles?
 (b) Combien y a-t-il d'associations constituées uniquement de couples illégitimes?
 (c) Combien y a-t-il d'associations avec uniquement un seul couple légitime?
 (d) Combien y a-t-il d'associations avec plus de couples illégitimes que de couples légitimes?

6 Exercices d'Annales

Exercice 37. (Extrait DM 7, Automne 2015) Dans une entreprise, il y a 800 employés. 300 sont des hommes, 352 sont membres d'un syndicat, 424 sont mariés, 188 sont des hommes syndiqués, 166 sont des hommes mariés, 208 sont syndiqués et mariés, 144 sont des hommes mariés syndiqués. Combien y a-t-il de femmes célibataires non syndiquées?

Exercice 38. (Interro n°2, Automne 2016) On interroge un groupe de gens sur leurs goûts musicaux: 71 d'entre eux apprécient David Bowie, 56 d'entre eux aiment Leonard Cohen, 6 d'entre eux admettent timidement (sous garantie d'anonymat) adorer Justin Bieber. Parmi ces gens, 83 aiment au moins un des trois chanteurs, 45 aiment Cohen et Bowie, 2 aiment Bieber et Cohen et 4 aiment Bieber et Bowie.

- (1) Combien de personnes aiment les trois chanteurs?
 (2) Combien de personnes aiment Bowie et Cohen mais n'aiment pas Bieber?

Exercice 39. (DM n°6, Automne 2016) Une étudiante sérieuse souhaite ranger ses livres de cours sur une étagère. Sa collection regroupe 3 livres de Mathématiques, 2 livres de Langue Vivante et 4 livres d'ESH. Combien y a-t-il de façon de ranger les 9 livres:

- (1) En tout?
 (2) De sorte que tous les livres soient classés par matière?
 (3) De sorte que les livres de mathématiques ne soient pas regroupés alors que c'est le cas pour les deux autres matières?
 (4) De sorte que seuls les livres de mathématiques soient regroupés?

Exercice 40. (Extrait DS 2, Automne 2015)

- (1) Combien y a-t-il d'anagrammes de "OLD WEST ACTION"² ?
- (2) Combien y a-t-il de paires (*i.e.* de combinaisons de deux cartes avec la même valeur) dans un jeu de 32 cartes? Combien de "mains" de 5 cartes contiennent deux paires? Combien n'en contiennent qu'une?
- (3) Résoudre dans \mathbb{N}

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = 5n$$

- (4) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} = 0.$$

- (5) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, pour tout $1 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$.
- (6) On considère l'application

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^2(3y - 5) \end{aligned}$$

L'application est-elle injective? surjective? bijective? Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$.

Exercice 41. (Soirée déguisée, DS 2 d'Automne 2015)

Afin de préparer la soirée de fin d'année d'une école de n étudiants, on a disposé dans la salle de détente un sac contenant p petits papiers sur chacun desquels est écrit le nom d'un personnage. Chaque étudiant tire au hasard un papier, puis le remet dans le sac, après avoir pris connaissance du personnage qu'il devra incarner. Il est donc possible que plusieurs personnes arrivent avec le même déguisement le jour de la soirée.

On appelle S_n^p le nombre de tirages pour lesquels tous les personnages seront présents à la soirée.

- (1) Que vaut S_n^p si $p > n$? Et si $p = n$? Justifier.
- (2) Que vaut S_n^1 ?
- (3) On suppose que $p = 2$. On décomposant le nombres de tirages selon le nombre d'étudiants ayant tiré le premier personnage, montrer que $S_n^2 = 2^n - 2$.
- (4) Montrer que

$$S_{n+1}^p = p(S_n^p + S_n^{p-1}).$$

(indication : on pourra compter le nombre de tirages possibles pour n étudiants, une fois qu'un des $n+1$ étudiants a déjà pioché, en différenciant deux cas, selon que le déguisement déjà tiré par l'étudiant est à nouveau pioché ou non.)

- (5) On cherche à montrer, à l'aide d'une récurrence sur $n \geq 1$, que, pour tout $p \geq 1$,

$$(\star) \quad S_n^p = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n.$$

- (a) On suppose que $n = 1$. Vérifier que l'égalité est vraie si on a également $p = 1$.
- (b) À l'aide des égalités des questions (4) et (5) de l'Exercice 39., montrer que l'égalité (\star) est encore vérifiée si $n = 1$ et $p > 1$.
- (c) On suppose que l'égalité (\star) est vérifiée pour une certaine valeur de $n \geq 1$ et pour tout $p \geq 1$.
 - (i) Vérifier qu'elle est encore vérifiée au rang $n+1$ avec $p = 1$.
 - (ii) En utilisant la Question (4) de l'exercice précédent, puis à l'aide de la formule du triangle de Pascal, montrer que l'égalité (\star) est encore vraie au rang $n+1$ pour $p > 1$.

²Un petit bonus fut accordé aux élèves ayant réussi à trouver l'anagramme correspondant au nom d'un célèbre acteur américain.

Exercice 42. (DM n°5, Automne 2016 - La meilleure façon de marcher)

Monsieur Fritzl emprunte un escalier à n marches pour aller à sa cave. Il descend cet escalier marche par marche ou en sautant une marche. On s'intéresse au nombre de façons différentes de descendre l'escalier à n marches, que l'on note a_n . Il est alors clair que $a_1 = 1$ (s'il n'y a qu'une seule marche, on ne peut descendre l'escalier que d'une seule façon).

- (1) Déterminer a_2, a_3 et a_4 .
- (2) Déterminer une relation entre a_{n+2}, a_{n+1} et a_n (on justifiera la réponse par un argument de dénombrement).
- (3) Montrer, à l'aide d'une récurrence double et de la formule du triangle de Pascal, que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} = a_n, \quad \text{où, par convention, } \binom{m}{p} = 0 \text{ si } p > m.$$

- (4) Montrer, en justifiant la réponse par un argument de dénombrement, que, si n et m sont deux entiers naturels, alors

$$a_{n+m} = a_n a_m + a_{n-1} a_{m-1}.$$

- (5) Écrire un programme `SciLab` qui, en fonction du nombre de marches de l'escalier et, à raison d'une descente différente chaque jour, compte le nombre de semaines nécessaires pour essayer toutes les façons de descendre différentes.
- (6) Exprimer a_n en fonction de n .

Exercice 43. (DM n°5, Automne 2016) On considère les deux applications

$$f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ (x, y, z) \longmapsto (x^3 y^2 z^6, x^4 y^5 z^{12}, x^2 y^2 z^5)$$

et

$$g : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (\ln(x), \ln(y), \ln(z)).$$

- (1) Déterminer

$$g(\{1\} \times]1; +\infty[\times \mathbb{R}_+^*) \quad \text{et} \quad g^{-1}(\{0; 1\} \times]1; +\infty[\times \mathbb{R}_+).$$

- (2) g est-elle injective? Surjective? Bijective?
- (3) Expliciter $(g \circ f)(x, y, z)$ puis déterminer, pour $a, b, c > 0$, $(g \circ f)^{-1}(\{(a; b; c)\})$. En déduire que $g \circ f$ est bijective puis que f est bijective.

Exercice 44. (DM n°6, Automne 2016 - Secret Santa)

Un enseignant sympathique organise, juste avant les fêtes, un *Secret Santa* pour sa classe. Les n participants mettent leur nom dans une urne et chacun tirera un petit papier et devra offrir un cadeau à la personne dont le nom est inscrit sur le petit papier. On appelle tirage l'attribution d'un papier à chaque participant.

- (1) Combien y a-t-il de tirages différents?
- (2) L'enseignant adore les cadeaux. Il décide de glisser non pas un seul, mais p papiers avec son nom. Ni vu ni connu.
 - (a) Combien y a-t-il de tirages différents dans cette nouvelle disposition? (Chaque participant continue de ne tirer qu'un seul papier).
 - (b) Dans combien de ces tirages l'enseignant se fait-il un cadeau à lui-même?
 - (c) Quel est le nombre de tirages pour lesquels les p papiers de l'enseignant sont tirés?