ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Chapitre 6. Probabilités élémentaires

1 Espaces probabilisés: le langage des probabilités

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut prédire avec certitude le résultat. L'étude de cette expérience nécessite alors la description de tous les résultats possibles, appelés **issues** (ou éventualités). L'ensemble de toutes les issues est appelé **univers** des possibles et est souvent noté Ω.

L'énoncé d'un exercice de probabilité (c'est à dire d'une expérience aléatoire) ne précise pas l'univers des possibles explicitement. C'est donc à celui ou celle qui en fait l'étude et cherche à résoudre l'exercice de *décrire* cet ensemble d'une manière rigoureuse et commode afin de travailler dessus. Cette étape s'appelle la **modélisation** de l'expérience.

Exemple. Regardons les univers correspondants aux expériences suivantes.

Expérience 1: On lance un dé cubique à 6 faces et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure. Les résultats possibles sont alors $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ qui est un ensemble de cardinal 6.

Expérience 2: On lance deux dés discernables (un rouge et un bleu par exemple) et on note les résultats obtenus. On voit alors qu'ici $\Omega = \{(i, j) : \ 1 \leq i \leq 6, \ 1 \leq j \leq 6\} = [\![1; 6]\!]^2$, qui est un ensemble à 36 éléments.

Expérience 3: Cette fois les deux dés sont identiques, mais on note encore les résultats obtenus. Comme on ne peut plus faire la différence entre les deux dés, les deux résultats de l'expérience précédent $(1; 3)$ et $(3; 1)$ sont en particulier dans cette nouvelle expérience l'expression de la même issue $\{1; 3\}$. Ainsi, on a

$$\Omega = \{\{i; j\} : \ 1 \leq i \leq j \leq 6\}.$$

De plus,

$$card(\Omega) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq 6} 1 = \sum_{j=1}^{6} \sum_{i=1}^{j} 1 = \sum_{j=1}^{6} j = \frac{6 \times 7}{2} = 21.$$

Expérience 4: On lance un dé et on regarde le résultat obtenu. Si ce résultat est 6, on arrête. Sinon, on relance le dé. On répète le processus jusqu'à obtenir 6 et on note le nombre de coups nécessaires. Il est possible d'avoir un 6 au premier coup, mais il est possible que le 6 n'arrive qu'au 7ème ou au 100ème coup, voire même au 1000ème. En fait, il est théoriquement possible que le premier 6 ne sorte qu'au $n-$ième coup, pour n'importe quel n entier naturel. Ainsi, $\Omega = \mathbb{N}$. On peut donc tout à fait avoir un univers des possibles infini.

Expérience 5: On choisit au hasard un nombre réel entre 0 et 1. Ici, clairement $\Omega = [0;1]$ est encore un ensemble infini.

Exercice 1.

(1) On lance n fois une pièce de monnaie. Quel est l'univers des possibles? Combien comporte-t-il d'éléments?
(2) On joue à l'*Euromillion*. On doit pour cela cocher 5 cases d'une grille comportant les nombres de 1 à 50 puis cocher deux étoiles parmi 11. Quel est l'univers des possibles? Combien comporte-t-il d'évènements?

Définition 1. *Un **évènement aléatoire** est un fait qui peut se produire, ou non, suivant le résultat d'une expérience aléatoire. On le représente par l'ensemble des issues qui le réalisent. Il s'agit donc d'une **partie** de Ω. Un évènement ne comportant qu'une seule issue est appelé **évènement élémentaire** (et se représente par un singleton).*

Exemple.

- Dans l'expérience 1 précédente, on peut par exemple considérer l'évènement "le résultat est un nombre pair" qui se représente par l'ensemble $\{2;4;6\}$.
- Il apparaît nécessaire de décrire l'ensemble des évènements que l'on considère et que l'on veut "mesurer" via la notion de probabilité, d'où l'introduction ci-après de la notion de *tribu*.
- Lorsque Ω est un ensemble **fini**, l'ensemble des évènements que l'on considère est le plus souvent l'ensemble de toutes les parties de Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$. En particulier, tout élément permet de former un évènement élémentaire et de plus Ω et $\emptyset$ sont des évènements appelés respectivement *évènement certain* et *évènement impossible*.

Exercice 2. On effectue l'expérience 2 précédente. Décrire les évènements suivants:

(i) A "la somme des nombres obtenus est supérieure ou égale à 10";
(ii) B "le produit des nombres obtenus est supérieur ou égal à 20".

L'identification entre évènements et sous-ensembles de Ω permet d'utiliser les opérations élémentaires de la théorie des ensembles pour traduire certains évènements, notamment les notions suivantes:

- (A ou B) est modélisé par $A \cup B$.
- (A et B) est modélisé par $A \cap B$.
- la non réalisation de l'évènement A est modélisée par $\overline{A}$.

Naturellement, on peut combiner des opérations pour décrire des évènements plus complexes et toutes les règles de calcul sur les ensembles sur chapitre correspondant sont alors utiles et utilisées.

Exercice 3. On lance deux pièces successivement. On note E l'évènement "la première pièce montre pile" et G "la deuxième pièce montre pile". Traduire les évènements suivants: $E \cup G$, $E \cap G$, $\overline{E}$, $\overline{G}$, $\overline{E \cup G}$ et $\overline{E} \cap G$.

Exercice 4. On lance n fois consécutives une pièce (où n est un entier). Si $k \in [\![1;n]\!]$, on note P_k l'évènement "on obtient pile au $k-$ième lancer", A_n l'évènement "on obtient que des pile au cours des n lancers", et B_n l'évènement "on obtient au moins une fois pile au cours des n lancers".

(1) Exprimer A_n à l'aide des P_k.
(2) Exprimer B_n à l'aide des P_k.
(3) Exprimer l'évènement "le premier pile apparaît au $n-$ième lancer".

Définition 2. *Deux évènements sont dits **incompatibles** lorsqu'il est impossible qu'ils soient réalisés simultanément. Ces deux évènements étant représentés par A et B, éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$, il seront incompatibles si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.*

☞ Naturellement, un évènement et son contraire sont toujours incompatibles.

Définition 3. *On dira qu'une famille* $(A_i)_{i\in I}$ *d'évènements forme un* ***système complet d'évènements*** *si c'est une partition de* Ω*, c'est à dire s'ils recouvrent l'univers et sont deux à deux incompatibles:*

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega \qquad \text{et} \qquad i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset.$$

☞ L'ensemble des évènements élémentaires forme naturellement toujours un système complet d'évènements.

Notion de Tribu. Espace probabilisable

Afin de pouvoir définir rigoureusement la notion de probabilité, il est important que l'ensemble des évènements que la probabilité vise à "mesurer" possède quelques propriétés de stabilité. On introduit pour cela la notion de tribu, puis d'espace probabilisable.

Définition 4. *Soit* Ω *un ensemble. On appelle* ***tribu*** *de parties de* Ω *tout sous-ensemble* $\mathcal{A}$ *de* $\mathcal{P}(\Omega)$ *tel que*

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$;
(ii) Si $A \in \mathcal{A}$, *alors* $\overline{A} \in \mathcal{A}$;
(iii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une famille d'évènements de* $\mathcal{A}$, *alors*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Munir Ω *d'une tribu amène à considérer l'****espace probabilisable*** $(\Omega, \mathcal{A})$. *Les éléments de* $\mathcal{A}$ *seront alors appelés les* ***évènements*** *de l'espace probabilisable* $(\Omega, \mathcal{A})$.

Une tribu est donc un ensemble de parties qui contient l'univers, qui est stable par passage au complémentaire et stable par union *dénombrable* (c'est à dire indexée par $\mathbb{N}$).

Naturellement, l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu de Ω (c'est d'ailleurs la tribu naturelle et celle que l'on utilise lorsque Ω est un ensemble fini). Mais on peut très bien définir et utiliser des tribus plus petites. Il peut être effet s'avérer difficile de "mesurer" certains ensembles assez compliqués lorsque Ω est un ensemble infini, d'où la volonté de réduire l'ensemble des évènements considérés.

Par exemple, pour $A \subset \Omega$, on peut regarder la tribu $\sigma_A = \{\emptyset; A; \overline{A}; \Omega\}$. C'est bien une tribu car elle vérifie les conditions de la définitions précédentes. C'est en fait la plus petite tribu qui contient l'évènement A. On l'appelle *tribu engendrée par* A.

On peut par ailleurs, déduire immédiatement de la définition de tribu la propriété suivante.

Proposition 1. Soit $\mathcal{A}$ une tribu de parties de Ω. Alors,

(1) $\emptyset \in \mathcal{A}$.
(2) Si $A, B \in \mathcal{A}$ alors

$$A \cup B \in \mathcal{A}, \quad A \cap B \in \mathcal{A}, \quad A \setminus B \in \mathcal{A}.$$

(3) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille d'éléments, alors

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Une fois que l'espace est probabilisable, il est "prêt" à être également muni d'une probabilité. Il est possible de définir la notion de probabilité pour n'importe quel espace probabilisable, cependant, dans ce premier chapitre consacré aux probabilités, on ne s'intéressera qu'au cas où l'univers Ω est un ensemble **fini**.

2 Probabilités sur un ensemble fini

Dans toute la suite, on considère donc un univers Ω **fini**.

2.1 Petite discussion introductive

On peut se demander pourquoi introduire de tels objets et autant préparer le terrain. Regardons les deux expériences suivantes qui se modélisent par le même univers.

Si on lance un dé cubique équilibré un grand nombre de fois, on constate que la fréquence d'apparition de chaque face se rapproche de $\frac{1}{6}$, ce qui suggère une modélisation de l'expérience par une *probabilité uniforme* sur $\Omega = [\![1;6]\!]$:

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$

Si maintenant le dé est truqué, l'univers reste le même mais la probabilité d'apparition de chaque face n'est plus la même, par exemple on pourrait avoir

$$p(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{3\}) = p(\{4\}) = \frac{1}{16}; \quad p(\{5\}) = \frac{1}{4}; \quad p(\{6\}) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, on peut définir deux probabilités différentes P et p sur le même univers Ω. Il est donc important de préciser ce qu'est une probabilité, et les évènements qu'elle peut "mesurer", d'où la notion d'espace probabilisable et la définition rigoureuse de probabilité qui suit.

2.2 Notion de probabilité sur un ensemble fini. Premières propriétés

Définition 5. *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle* ***probabilité*** *sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $P : \mathcal{A} \to [0;1]$ telle que*

(i) $P(\Omega) = 1$;
(ii) $\forall A, B \in \mathcal{A},\ A \cap B = \emptyset \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un ***espace probabilisé****. De plus, pour chaque évènement $A \in \mathcal{A}$, $P(A)$ s'appelle la probabilité de A.*

✎ *Exemple et Définition* (Probabilité uniforme).

On considère un ensemble fini, non vide, Ω ainsi que l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)$. On appelle **probabilité uniforme** sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ (ou plus simplement sur Ω) l'application

$$\begin{array}{rcl} P : \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0;1] \\ A & \mapsto & \dfrac{\#A}{\#\Omega} \end{array}$$

Il est alors facile de vérifier que l'application P satisfait bien les conditions de la définition précédente: c'est bien une probabilité. De plus, si $\omega \in \Omega$, alors

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{\#\Omega}.$$

En particulier, tous les évènements élémentaires ont la même probabilité.

☞ *La probabilité uniforme modélise une expérience dont toutes les issues sont* ***équiprobables***

Exercice 5. Les 28 tomes d'une encyclopédie sont rangés sur une étagère.

(1) Quelle est la probabilité que les tomes I et II apparaissent côte à côte et dans cet ordre sur l'étagère?
(2) Quelle est la probabilité que p premiers tomes $(1 \leq p \leq 28)$ apparaissent côte à côte et dans le bon ordre?

Proposition 2 (Loi de probabilité de P). Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, alors

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\}).$$

En particulier, si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ alors

$$1 = \sum_{k=1}^{n} P(\{\omega_k\}).$$

Une probabilité est ainsi caractérisée par les valeurs $(P(\{\omega_1\}), ..., P(\{\omega_n\}))$, ce qu'on appelle **loi de probabilité de** P.

Exercice 6. Un joueur lance une bille sur une planche percée de n trous numérotés de 1 à n ($n > 2$). La bille tombe toujours dans un trou (et dans un seul). La probabilité que la bille tombe dans le trou numéro 1 est $\frac{1}{3}$, celle qu'elle tombe dans le trou numéro 2 est $\frac{1}{3^2}$ et plus généralement celle du trou numéro k est $\frac{1}{3^k}$ (pour $1 \leq k < n$). Quelle est alors la probabilité qu'elle tombe dans le trou numéro n?

Il découle directement de la définition de probabilité la proposition suivante.

Proposition 3 (Calcul des probabilités)**.**
Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé (fini) et A, B deux évènements. Alors,

(i) $P(\emptyset) = 0$;
(ii) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
(iii) Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$.

Pour calculer la probabilité d'une union, on utilise la formule du crible de Poincaré.

Proposition 4 (Probabilité d'une union: formule du crible de Poincaré)**.**
Soient A, B, C trois évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

et

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C).$$

Exercice 7. On tire, avec remise, une boule dans une urne, qui en contient une bleue, une blanche et une rouge, n fois de suite. On note p_n la probabilité que les trois couleurs apparaissent au moins une fois lors des n tirages et A l'évènement "la boule bleue n'apparaît pas pendant les n tirages", B l'évènement "la boule blanche n'apparaît pas pendant les n tirages" et C l'évènement analogue pour la boule rouge.

(1) Calculer $P(A \cup B \cup C)$.
(2) En déduire une expression de p_n en fonction de n.
(3) Calculer $\lim_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter le résultat.

Proposition 5 (Unions disjointes)**.**
Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé (fini) et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'évènements deux à deux incompatibles. Alors,

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i).$$

En particulier, si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'évènements,

$$1 = P(\Omega) = \sum_{i \in I} P(A_i).$$

Exercice 8. Une urne contient 3 boules jaunes, 3 boules bleues, 3 rouges, 3 vertes et 3 noires. On tire successivement, sans remise, 3 boules de l'urne. Déterminer la probabilité que le tirage soit unicolore.

2.3 Probabilités conditionnelles

Lorsque l'on réalise (successivemen une ou plusieurs expériences aléatoires, on peut voir tenir compte dans une prévision d'une information complémentaire. Imaginons par exemple qu'on lance un dé (cubique) équilibré. La probabilité d'obtenir un 6 est alors égale à $\frac{1}{6}$. Si maintenant, je tiens compte du fait que les faces du dés sont peintes, en vert pour les chiffres pairs, et en rouge pour les impairs. La probabilité d'obtenir un 6 **sachant** que je vois que la face est verte est alors de $\frac{1}{3}$. Cette probabilité est **conditionnée** par la couleur de la face, c'est une *probabilité conditionnelle.*

Définition 6. *Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé dont B est un évènement non négligeable (i.e. $P(B) > 0$). Pour tout évènement A, on définit la* ***probabilité conditionnelle de A sachant*** *B par*

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Le calcul des probabilités conditionnelles peut s'avérer difficile est les résultats contre-intuitifs, comme on pourra le voir avec l'exercice ci-dessous. Il est donc capital de faire preuve de rigueur et de vigilance lors des calculs et de la modélisation et la formulation de l'expérience.

Exercice 9 (Paradoxe des enfants, extrait de *Scientific American* (1959))**.**
Mr. Jones has two children. The older child is a girl. What is the probability that both children are girls? Mr. Smith has two children. At least one of them is a boy. What is the probability that both children are boys?

Proposition 6. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé dont B est un évènement non négligeable. Alors, l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0;1] \\ A & \to & P_B(A) \end{array}$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Corollaire 1. La probabilité P_B vérifie donc toutes les règles de calcul des probabilités. Plus précisément, si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$,

(1) $P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A)$;
(2) Si $A_1 \subset A_2$, alors $P_B(A_1) \leq P_B(A_2)$;
(3) les formules du crible de Poincaré restent vrai en remplaçant P par P_B.

Corollaire 2. Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé. Pour tous évènements $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec $P(B) > 0$, on a

$$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A).$$

☞ *Le résultat précédent est très pratique pour calculer des probabilités d'intersection à partir des probabilités conditionnelles.*

Il est également possible de conditionner par plusieurs évènements et le résultat précédent se généralise pour calculer la probabilité de l'intersection d'une famille finie d'évènements. On appelle cela *Formule des probabilités composées.* La démonstration se fait par récurrence et on invite le lecteur à tenter de l'écrire.

Proposition 7 (Formule des probabilités composées)**.**
Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'évènements tels que $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$. Alors,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times \cdots \times P_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Exercice 10. On disposes de trois urnes $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ et $\mathcal{U}_3$ qui contiennent des boules blanches et noires:

- $\mathcal{U}_1$ contient 2 boules blanches et 3 noires;
- $\mathcal{U}_2$ contient 4 boules blanches et 2 noires;
- $\mathcal{U}_3$ contient 6 boules blanches et 1 noire.

On effectue trois tirages successifs en suivant le protocole qui suit:

- On tire au hasard une boule dans l'urne $\mathcal{U}_1$ et on note sa couleur. On place ensuite cette boule dans l'urne $\mathcal{U}_2$.
- On tire ensuite une boule dans l'urne $\mathcal{U}_2$, on note encore sa couleur et on la place dans l'urne $\mathcal{U}_3$.
- Enfin, on tire une dernière boule dans l'urne $\mathcal{U}_3$ dont on note la couleur.

Quelle est la probabilité que les trois boules tirées soient de la même couleur?

Le résultat qui suit est très important et très utile, il permet de calculer la probabilité d'un évènement en conditionnant par un système complet d'évènements.

Proposition 8 (Formule des probabilités totales)**.**
Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ un système complet d'évènements tous non négligeables. Alors, pour tout évènement B, on a

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B) \times P(A_i).$$

☞ *Cette formule est notamment utilisée souvent pour un système complet de deux évènements A et $\overline{A}$ (non négligeables). Elle s'écrit alors*

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P_A(B) \times P(A) + P_{\overline{A}}(B) \times P(\overline{A}).$$

Exercice 11. On dispose de quatre urnes numérotées:

- $\mathcal{U}_1$ contient 4 boules blanches et 1 noire;
- $\mathcal{U}_2$ contient 3 boules blanches et 2 noires;
- $\mathcal{U}_3$ contient 2 boules blanches et 3 noires;
- $\mathcal{U}_4$ contient 1 boule blanche et 4 noires;

On choisit au hasard une urne parmi les quatre et on tire une boule à l'intérieur. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche?

On peut également se demander si il est possible d'"inverser" des probabilités conditionnelles. C'est à dire si, connaissant par exemple $P_B(A)$ on peut obtenir $P_A(B)$. C'est l'objet de la formule suivante, appelée *Formule de Bayes* qu'on énonce en deux temps, commençant par le cas particulier de deux évènements. Sa démonstration est facile et repose sur la formule des probabilités totales.

Proposition 9 (Formule de Bayes)**.** Soit $(\Omega, P(\Omega), P)$ un espace probabilisé.
❶ *Version simple* :
Soient A et B deux événements non négligeables. On a alors :

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)} = \frac{P_A(B)P(A)}{P_A(B)P(A) + P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A})}.$$

❷ *Version générale* :
Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements tous non négligeables. Soit B un autre évènement également de probabilité non nulle.
Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a :

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P_{A_i}(B)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P_{A_k}(B)}.$$

Exercice 12 (Le paradoxe des maladies rares)**.**

Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population avec la proportion d'une personne malade sur 10000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage: si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1%.

Que penser de ce test?

2.4 Indépendance en probabilités

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et A, B deux événements. *Intuitivement*, on dira que A et B sont *indépendants* si la réalisation de B ne change rien pour celle de A et inversement. Plus rigoureusement, on introduit la définition suivante.

Définition 7. *Deux événements A et B d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ sont dits* ***indépendants pour la probabilité*** *P si*

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

En particulier, si $P(B) \neq 0$, A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$.

⚠ **Attention.** La notion d'indépendance dépend de la probabilité qui équipe l'espace. En particulier, et contre l'idée intuitive que l'on pourrait avoir, deux évènements peuvent être indépendants pour un certaine probabilité P mais pas pour une autre! On sera donc vigilants. Cela dit, quand il n'y a pas d'ambiguïté sur la probabilité P, on dira simplement que les deux évènements sont indépendants.

Exercice 13. On effectue l'**expérience 1** (on lance un dé cubique et on regarde le résultat). On munit $\Omega = [\![1, 6]\!]$ de l'ensemble de ses parties et de deux probabilités:

- P_1 est la probabilité uniforme sur Ω;
- P_2 est la probabilité "dé pipé" définie par :

$$P_2(\{6\}) = \frac{1}{3}, \quad P_2(\{5\}) = P_2(\{4\}) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad P_2(\{1\}) = P_2(\{2\}) = P_2(\{3\}) = \frac{1}{9}.$$

On considère les événements A "obtenir 4 ou 5" et B "obtenir 5 ou 6". Les évènements A et B sont-ils indépendants pour la probabilité P_1? Et pour la probabilité P_2?

Exercice 14. On considère une famille avec des enfants. On considère qu'il y a équiprobabilité de la répartition des sexes.

(1) On suppose qu'il y a deux enfants. Étudier l'indépendance des évènements:
   - A "la famille a des enfants de deux sexes";
   - B "la famille a au plus un garçon".

(2) Qu'en est-il de l'indépendance des ces mêmes évènements si la famille compte trois enfants?

⚠ **Attention.** Deux évènements (non négliegables) **incompatibles ne sont pas indépendants**. en particulier, si A est un évènement non négligeable alors A et $\overline{A}$ (qui sont bien incompatibles) ne sont pas indépendants!

Proposition 10. Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé et A, B deux événements **indépendants pour la probabilité P**, alors

(1) les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants.
(2) les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants.
(3) les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

On peut alors s'intéresser à l'indépendance mutuelle de plusieurs évènements. Cependant, la généralisation de la notion d'indépendance est plus délicate qu'il n'y parait. Par exemple, si on a trois évènements A, B, C, on pourrait d'un côté regarder leur indépendance *deux à deux*:

$$(1) \quad P(A \cap B) = P(A) \times P(B), \qquad P(B \cap C) = P(B) \times P(C) \quad \text{et} \quad P(C \cap A)P(C) \times P(A).$$

Mais on pourrait aussi vouloir que la probabilité de l'intersection des trois évènements soit égale au produit des trois probabilités:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C). \tag{2}$$

Or, ces deux conditions ne sont pas du tout équivalentes, comme le montre l'exercice ci-dessous.

Exercice 15. On lance deux fois un dé équilibré. On considère les évènements A "le premier numéro est pair", B "le deuxième numéro est impair" et C "la somme des deux numéros est paire".

(1) Calculer la probabilité de ces évènements.
(2) Ces évènements sont-ils indépendants 2 à 2 ? Mutuellement indépendants ?

La définition est alors la suivante.

Définition 8. *Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et $A_1, \ldots, A_n$ un nombre fini d'événements. On dit que $A_1, \ldots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** pour la probabilté P si pour tout sous-ensemble d'indices $I \subset [\![1, n]\!]$,*

$$P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} P(A_i).$$

☞ La définition d'indépendance mutuelle est donc *plus forte* que l'indépendance "deux à deux" (qui est par conséquent une condition nécessaire mais non suffisante).

Ainsi, trois évènements A, B et C seront mutuellement indépendants les les relations (1) **et** (2) sont vérifiées.

Proposition 11. Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et $A_1, \ldots, A_n$ des évènements mutuellement indépendants. Soit alors $(B_i)_{1\leq i\leq n}$ les évènements tels que $B_i = A_i$ ou bien $B_i = \overline{A}_i$. Alors, les évènements $B_1, B_2, ..., B_n$ sont encore mutuellement indépendants.

☞ On peut donc remplacer n'importe lequel des évènements d'une famille d'évènements mutuellement indépendants par son évènement contraire en conservant l'indépendance mutuelle.

3 Autres exercices

Exercice 16.

(1) On tire au hasard simultanément 5 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 coeurs?
(2) On tire au hasard et successivement, sans remise, 5 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 coeurs?
(3) On tire au hasard et successivement, avec remise, 5 cartes d'un jeu de 32. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 coeurs?

Exercice 17. On lance trois fois consécutives un dé équilibré à 6 faces et les résultats sont respectivement notés a, b et c. On forme alors le polynôme aléatoire $P(x) = ax^2 + bx + c$. Calculer la probabilité que

(1) P ait une seule racine réelle.
(2) P ait deux racines réelles.
(3) P n'ait aucune racine réelle.

Exercice 18. Dans un jeu de 32 cartes, on tire successivement et avec remise 5 cartes.

(1) Calculer la probabilité que le premier as apparaisse :

a) à la première pioche,	b) à la seconde pioche,	c) à la troisième pioche
d) à la quatrième pioche,	e) à la cinquième pioche,	f) jamais.

(2) Reprendre la question précédente avec le second as.

Exercice 19. Dans une loterie, il y a 30 billets dont n sont gagnants. On suppose que tous les billets ont la même probabilité d'être achetés. On achète deux billets au hasard. Déterminer la probabilité de ne rien gagner et en déduire la valeur de n à partir on a 90% de chances de gagner.

Exercice 20. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir un 6 lors d'un lancer est $\frac{1}{2}$.

(1) On lance un dé au hasard parmi les 100 dés et on obtient 6. À l'aide de la formule de Bayes, déterminer la probabilité que le dé choisi soit pipé.
(2) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On choisit un dé au hasard parmi les 100. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé?
(3) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 21. On dispose de deux urnes, $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$. La première contient deux boules blanches et quatre noires alors que la seconde contient cinq boules blanches et sept noires.

On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes:

- On choisit une urne au hasard et on tire la boule dans l'urne choisie
- On note la couleur et on remet la boule dans l'urne dont elle provient
- Si la boule tirée est blanche, on fait le tirage suivant dans l'urne $\mathcal{U}_1$, sinon dans l'autre.

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note B_n l'évènement "la boule tirée au $n-$ième tirage est blanche" et $p_n = P(B_n)$.

(1) Calculer p_1.
(2) Trouver une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
(3) En déduire la valeur de p_n en fonction de n.

Exercice 22. On dispose de deux dés (cubiques) A et B:

- Le dé A a quatre faces rouges et deux faces blanches;
- Le dé B a deux faces rouges et quatre faces blanches.

On lance une pièce de monnaie, dont la probabilité d'obtenir "pile" est $\frac{1}{3}$: si on obtient "pile", on ne joue qu'avec le dé A, sinon on ne joue qu'avec le dé B.

(1) Quelle est la probabilité d'obtenir "blanc" au troisième lancer sachant qu'on a obtenu "rouge" aux deux premiers?
(2) On a obtenu n fois "rouge" en n jets du dé. Quelle est la probabilité d'avoir joué avec le dé A?

Exercice 23. Une pièce A donne "face" avec la probabilité $\frac{2}{5}$, une pièce B avec la probabilité $\frac{7}{10}$. On lace une des deux pièces au hasard: si on obtient "face", on continue avec la même pièce, sinon on en change. On effectue comme cela n lancers. On cherche à obtenir p_n la probabilité d'obtenir "face" au $n-$ième lancer. Pour cela, on introduit a_n la probabilité de lancer la pièce A au $n-$ième coup.

(1) Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n. En déduire l'expression, en fonction de n, de a_n.
(2) Exprimer p_n en fonction de a_n. Conclure.

Exercice 24. Une boîte A contient deux jetons portant le numéro 0 et une boîte B contient deux jetons portant le numéro 1. On tire au hasard un jeton dans chaque boîte et on les échange. On recommence cette opération n fois. On s'intéresse à la somme des jetons contenus dans la boîte A à l'instant $t = n$. Pour cela, on introduit les évènements :

- P_n : " la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant $t = n$ vaut 0 ";
- Q_n : " la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant $t = n$ vaut 1 ";
- R_n : " la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant $t = n$ vaut 2 ";

On pose également $p_n = P(P_n)$, $q_n = P(Q_n)$ et $r_n = P(R_n)$.

(1) Calculer p_0, q_0, r_0, p_1, q_1, r_1.
(2) Exprimer p_{n+1} (resp. q_{n+1}, resp. r_{n+1}) en fonction de p_n, q_n, r_n

(3) Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad q_{n+2} = \dfrac{1}{2}q_{n+1} + \dfrac{1}{2}q_n$.
(4) En déduire l'expression de q_n en fonction de n puis celle de p_n et de q_n.
(5) Déterminer les limites des trois suites. Interpréter ce résultat.

Exercice 25. Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans l'urne, en notant à chaque fois la couleur. On s'intéresse aux évènements:

- A_n "les deux couleurs sont présentes à l'issue des n tirages";
- B_n "on obtient au plus une boule noire".

(1) Déterminer les probabilités, en fonction de n, des évènements A_n et B_n.
(2) Étudier leur indépendance pour $n = 2$ et $n = 3$.

Exercice 26. (Chaussettes, Extrait DM 8, Automne 2015)
On range k paires de chaussettes dans n tiroirs, au hasard. Avec quelle probabilité les paires de chaussettes se retrouvent-elles toutes dans des tiroirs différents?

Exercice 27. Dans un groupe d'étudiants, il y a n filles et n garçons. On veut faire des groupes de deux pour des exposés et ces groupes seront choisis au hasard.

(1) Combien y a-t-il de listes ordonnées de paires d'étudiants?
(2) Combien de ces listes sont formées uniquement de groupes mixtes?
(3) En déduire la probabilité p_n que tous les groupes soient mixtes.
(4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,
$$\frac{2^{2n-1}}{n} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n}.$$
(5) Quelle est alors la limite de p_n?

Exercice 28. (Poker, Extrait DM 8, Automne 2015) Une main de poker est constituée de cinq cartes, choisies parmi 32. Il y a dans le jeu 4 couleurs (Trèfle $\clubsuit$, Pique $\spadesuit$, Coeur $\heartsuit$ et Carreau $\diamondsuit$) et 8 valeurs par couleur (7,8,9,10, Valet, Dame, Roi et As). Déterminer, en fonction de leur probabilité d'apparition, l'ordre des combinaisons (de la plus "forte" à la plus "faible") parmi

- le *brelan*: 3 cartes de la même valeur et rien de mieux;
- le *carré*: 4 cartes de la même valeur;
- la quinte *flush*: 5 cartes qui se suivent et qui sont de la même couleur;
- la *couleur*: 5 cartes d'une même couleur autre que la quinte flush;
- la *suite*: 5 cartes qui se suivent mais pas de la même couleur.

Exercice 29. (Évolution du cours d'un titre, Extrait DM 9, Automne 2015)
Soit a un réel fixé, élément de $\left]0; \frac{1}{2}\right[$.
Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut monter, rester stable, ou baisser. Dans un modèle mathématique, on considère que:

- le premier jour, le titre est stable;
- si le jour n le titre monte, alors il montera également le jour $n+1$ avec probabilité $1-2a$, restera stable avec probabilité a et baissera avec probabilité a;
- si le jour n le titre est stable, alors il restera stable le jour $n+1$ avec probabilité $1-2a$, montera avec probabilité a et baissera avec probabilité a;
- si le jour n le titre baisse, alors il baissera encore le jour $n+1$ avec probabilité $1-2a$, restera stable avec probabilité a et montera avec probabilité a.

On note M_n (resp. S_n, B_n) l'évènement "le titre donné monte le jour n" (resp. "est stable le jour n", "baisse le jour n") et m_n (resp. s_n, b_n) la probabilité correspondante.

(1) Exprimer m_{n+1} en fonction de m_n, s_n et b_n. Même question avec s_{n+1}.
(2) Que vaut $m_n + s_n + b_n$? En déduire l'expression de b_n en fonction de m_n et s_n.
(3) Montrer que les suites (m_n) et (s_n) sont arithmético-géométriques.

(4) En déduire l'expression du terme général de chacune des trois suites et déterminer leurs limites. Interpréter.

Exercice 30. (Combat de dés, Extrait DM 9, Automne 2015)
Deux joueurs A et B s'affrontent aux dés selon les règles suivantes:

- A lance en premier le dé (qui est cubique et équilibré) et annonce son résultat.
- B lance à son tour le dé, consécutivement jusqu'à obtenir un résultat supérieur ou égal à celui de A, avec un maximum de N tentatives. Si il y arrive, il gagne, sinon il perd.

(1) Quelle est la probabilité que B gagne en un coup?
(2) Quelle est la probabilité (en foncion de N) qu'il perde?
(3) Calculer la probabilité précédente pour $N = 3$.

Exercice 31. (D'après **INSEEC 2002**, Extrait du Concours Blanc n°1, Janvier 2016)
Une roue de loterie se compose de secteurs identiques, numérotés de 1 à 12.
Une personne fait tourner la roue devant un repère fixe. On suppose que chaque secteur a la même probabilité de s'arrèter devant ce repère.
À chaque partie, un joueur mise une certaine somme d'argent en choisissant un, deux ou trois numéros sur les 12; il est gagnant si le secteur qui s'arrète devant le repère porte l'un des numéros qu'il a choisis.
Un joueur possèdant un crédit illimité, effectue une suite de parties en adoptant la stratégie suivante :

- Il mise sur le chiffre 1 à la première partie.
- S'il perd à la $n^{ième}$ partie, $n \geq 1$, il mise uniquement sur les chiffres 1 et 2 à la partie suivante et s'il gagne à la $n^{ième}$ partie, il mise sur les chiffres 1, 3 et 5.

(1) On note p_n la probabilité de l'événement A_n : « le joueur gagne la $n^{ième}$ partie ».
  (a) Calculer les probabilité conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$, en déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6}.$$
  (b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et déterminer $\lim_{n\to+\infty} p_n$.
(2) Soit $k \in [\![1; n]\!]$, on note B_k l'événement : « le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties et ce gain a lieu à la $k^{ième}$ partie' ».
  (a) À l'aide de la formule des probabilités composées, calculer $P(B_n)$.
  (b) Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$, calculer $P(B_k)$.
  (c) En déduire la probabilté q_n que le joueur ne gagne qu'une seule fois au cours des n premières parties.

Exercice 32. (Faux Billets, Extrait du DS 2, Automne 2016 et d'après **ESC 2003**)
On suppose que p est un réel fixé de $]0; 1[$ qui représente la probabilité qu'un billet de 100 euros soit faux.
On dispose d'un détecteur de faux billets imparfait qui allume une lumière qui est soit bleue lorsqu'il considère que le billet testé est vrai, soit rouge lorsqu'il considère que le billet testé est faux .
On note F : " Le billet testé est faux " et B : " La lumière qui s'allume est bleue ".
On note $P(\bar{F}|B) = \alpha$ et $P(F|\bar{B}) = \beta$, et on suppose dans tout l'exercice que $\alpha + \beta > 1$.

(1) En utilisant une formule des probabilités totales pour exprimer $P(F)$, montrer que
$$P(B) = \frac{\beta - p}{\alpha + \beta - 1}.$$
En déduire que $1 - \alpha \leqslant p \leqslant \beta$.
(2) Montrer que la probabilité que le détecteur valide un faux billet est
$$P_F(B) = \frac{(1-\alpha)(\beta - p)}{p(\alpha + \beta - 1)}.$$

(3) On suppose dans cette question uniquement que $\beta = \alpha = 0,95$ et on note
$$x = \alpha + p - 1 = p - 0,05.$$
Montrer que
$$1 - P_F(B) = \frac{0,95x}{0,9(x+0,05)}.$$

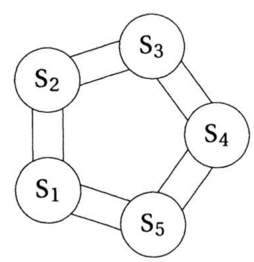
Exercice 33. (Extrait du DS 2, Automne 2016) Une pièce A donne $FACE$ avec la probabilité $2/5$, une pièce B avec la probabilité $7/10$. On lance une des deux pièces au hasard: si on obtient $FACE$, on continue avec la même pièce, sinon on en change. On effectue comme cela n lancers.

(1) On cherche à obtenir p_n la probabilité de l'évènement F_n: "On obtient $FACE$ au $n-$ième lancer". Pour cela, on introduit a_n la probabilité de l'évènement A_n: "on lance la pièce A au $n-$ième coup".
  (a) Que valent $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$? (On justifiera soigneusement la réponse.)
  (b) Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n. En déduire l'expression, en fonction de n, de a_n.
  (c) Exprimer p_n en fonction de a_n. Conclure.

(2) On introduit, pour $k \in [\![1;n]\!]$, l'évènement B_k: "on obtient $PILE$ au $k-$ième lancer uniquement et $FACE$ à tous les autres".
  (a) Déterminer $P(B_1)$ et $P(B_n)$.
  (b) Déterminer ensuite $P(B_k)$ pour $k \in [\![2;n-1]\!]$.
  (c) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une seule fois $PILE$ au cours des n lancers?

Exercice 34. (Extrait du Concours Blanc de Décembre 2016 et d'après **ESSEC II 2002**)

Deux personnes P_1 et P_2 ont rendez-vous dans un complexe formé de cinq sites S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5, disposés en pentagone et reliés par des routes, comme l'illustre le schéma ci-contre.



Ils arrivent au rendez-vous à l'heure prévue, mais suite à un malentendu, P_1 se présente au site S_1 et P_2 au site S_2.

Ils décident alors de partir à la recherche I'un de l'autre. Ils empruntent les différentes routes du complexe, avec les règles suivantes
- à partir d'un site, chacun choisit de se rendre sur l'un des deux sites voisins, les deux possibilités étant équiprobables;
- les déplacements des deux personnes se font simultanément;
- tous les choix de déplacement se font indépendamment les uns des autres.

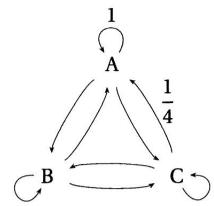
Ils continuent à se déplacer ainsi jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même site (ils ne se rencontrent pas le long des routes). Une fois retrouvés, ils ne se déplacent plus.

Pour tout entier naturel n, on définit les trois événements A_n, B_n, C_n:
- A_n : "les deux personnes sont sur le même site après le n-ième déplacement";
- B_n : "les deux personnes sont sur des sites adjacents après le n-ième déplacement";
- C_n : "les deux personnes sont à deux routes de distance après le n-ième déplacement".

On note a_n, b_n, c_n les probabilités des événements A_n, B_n, C_n.

(1) Justifier que A_n, B_n, C_n forment un système complet d'événements.
(2) Déterminer les valeurs de a_0, b_0 et c_0.

(3) (a) Justifier soigneusement que
$$P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P_{A_n}(A_{n+1}) = 1.$$
(b) Déterminer toutes les probabilités conditionnelles analogues. On représentera les résultats en reproduisant et complétant le schéma ci-contre.



(4) Établir les relations suivantes pour tout entier $n \in \mathbb{N}$
$$\begin{cases} a_{n+1} &= a_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} &= \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} &= \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{cases}.$$

(5) (a) Exprimer b_{n+2} à l'aide de b_{n+1}, b_n et c_n puis exprimer c_n en fonction de b_{n+1} et b_n pour obtenir enfin une relation entre b_{n+2}, b_{n+1} et b_n.

(b) En déduire une expression de b_n en fonction de n. On fera intervenir les nombres
$$\alpha = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{5+\sqrt{5}}{8}.$$
(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$c_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\beta^n - \alpha^n\right).$$

(6) À partir de la somme $a_n + b_n + c_n$, déterminer la limite, lorsque n tend vers l'infini, de la suite (a_n).
(7) On note Z l'évènement "les deux personnes se rencontrent à un moment".
(a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A_n \subset Z.$$
(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$a_n \leq P(Z) \leq 1$$
(c) Quelle est la probabilité que les deux personnes ne se retrouvent jamais ?