ECE 2 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Chapitre 7. Rappels et compléments sur les intégrales impropres

On sait définir l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle $[a;b]$ **fermé** lorsque celle-ci y est continue

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

(On encourage d'ailleurs tout lecteur à reprendre le Chapitre 16 du cours de première année.) L'objectif de ce chapitre est de définir, lorsque cela est possible l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle **ouvert** $]a;b[$, où les bornes a et b pourraient éventuellement être infinies.

Certaines de ces notions ayant été déjà introduites dans le cours de première année (voir Chapitre 17), ces résultats sont présentés ici de manière assez succincte mais n'en demeurent pas moins très importants.

Pour alléger les notations que l'on essaie de présenter de la façon la plus générale possible, on adopte la notation classique suivante. On dit que $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\}$, c'est à dire si a est un nombre réel ou l'infini.

1 Extension de la notion d'intégrale

Définition 1. *Soit f une fonction continue sur l'intervalle **semi-ouvert** $[a;b[$. On dit que l'intégrale*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

*est **impropre** en b. Si la fonction est continue sur l'intervalle semi-ouvert $]a;b]$, l'intégrale précédente est alors impropre en a.*

☞ L'étude d'une intégrale impropre commence par la recherche des valeurs générant ce caractère impropre, c'est à dire par l'étude de la continuité de la fonction intégrée.

Lors de l'étude de continuité de la fonction intégrée, celle-ci peut s'avérer avoir une limite ou bien être prolongeable par continuité et dans ce cas, on est ramené à calculer l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé.

Proposition 1. Soit f une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert $[a;b[$ admettant une limite finie en b (*i.e.* prolongeable par continuité à b). On dit que l'intégrale

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

est **faussement impropre** (en b) et que c'est une intégrale ***convergente***.

Exercice 1. Que peut-on dire des intégrales suivantes?

$$(i)\ \int_0^1 t\ln(t)\mathrm{d}t, \qquad (ii)\ \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1}\mathrm{d}x$$

1.1 Intégrale convergente sur un intervalle du type $[a;+\infty[$ ou $]-\infty;a]$

Définition 2 (Convergence d'une intégrale impropre)**.**
Soit f une fonction continue sur l'intervalle semi-ouvert $[a\,;\,+\infty[$.

*(1) On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est **convergente** lorsque la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$, et dans ce cas, on pose*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

*(2) Sinon, on dit que l'intégrale **diverge**.*
(3) On définit de la même façon lorsque f est continue sur $]-\infty;a]$,

$$\int_{-\infty}^a f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)\mathrm{d}t.$$

☞ Étudier la nature d'une intégrale signifie déterminer si l'intégrale est convergente ou non.

Exercice 2. Déterminer la nature des intégrales suivantes

$$(i)\ \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t, \qquad (ii)\ \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t}, \qquad (iii)\ \int_e^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}.$$

1.2 Sur un intervalle du type $[a;b[$ ou $]a;b]$

Définition 3. *Soit f une fonction continue sur l'intervalle semi-ouvert $]a;b]$.*

*(1) On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est **convergente** lorsque la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t)t$ admet une limite finie quand x tend vers a, et dans ce cas, on pose*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to a}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t.$$

(2) Si l'intégrale n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.
(3) De la même manière, on définit la (convergence de) l'intégrale sur $[a;b[$

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 3. Quelle est la nature des intégrales suivantes?

$$(i)\ \int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t, \qquad (ii)\ \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t}, \qquad (iii)\ \int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x.$$

1.3 Sur un intervalle du type $]a;b[$, avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$

Définition 4. *Soit f une fonction continue sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ (où $-\infty \leq a < b \leq +\infty$). Alors, on dit que l'intégrale*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

converge si et seulement si les intégrales

$$\int_a^c f(t)\mathrm{d}t \qquad \textbf{\textit{et}} \qquad \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$$

convergent pour tout réel $c \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on a

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 4. Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto -\exp((-\sqrt{x})$ puis étudier la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

☞ Les notions d'intégrales convergentes (redéfinies ci-dessus) peuvent naturellement être étendus aux fonctions continues par morceaux et notamment aux fonctions présentant un **nombre fini de points de discontinuité.**

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Justifier de la convergence et calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t.$$

2 Techniques de calcul

Les propriétés sur les intégrales impropres (linéarité, positivité, croissance) découlent de celles sur les intégrales définies sur un segment par restriction de l'intervalle et passage à la limite.

2.1 Intégration par parties ou changement de variables

✎ **Méthode.** (IPP ou un changement de variable sur des intégrales impropres.)

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b[$ (avec $b \in \overline{\mathbb{R}}$) dont l'intégrale impropre sur le même intervalle converge.

Pour **calculer** cette intégrale impropre en intégrant par partie ou par changement de variable, on suit les étapes suivantes.

(1) On **restreint l'intervalle d'intégration** à $[a\,;\,x]$ avec $x \geq a$.
(2) On effectue une intégration par parties ou un changement de variable classique sur l'intégrale définie

$$\int_a^x f(t)\mathrm{t}.$$

(3) On passe à la limite quand x vers $+\infty$.

⚠ On ne fera donc **jamais** d'IPP directement sur un intervalle du type $[a;+\infty[$ ou $]-\infty;+\infty[$.

Exercice 6. Justifier la convergence et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 7. À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{1-t}$, justifier la convergence et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t$.

2.2 Utilisation de la parité

Proposition 2. Soit f une fonction continue sur $]-a;a[$ (avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$).

(1) Si la fonction f est **paire**, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$ converge, et dans ce cas
$$\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t.$$

(2) Si la fonction f est **impaire**, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$ converge, et dans ce cas
$$\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 8. Soit f la fonction sur $\mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{2t}{e^t + e^{-t}}$.

(1) Montrer que f est impaire.

(2) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$ converge.

(3) Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0$.

3 Critères de convergence

3.1 Intégrales de Riemann

Les intégrales de Riemann sont des intégrales de référence que l'on peut utiliser comme du cours.

Théorème 1 (Convergence des intégrales de Riemann)**.** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors,*

(1) Intégrale de Riemann impropre en $+\infty$:
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \textit{ converge } \iff \alpha > 1.$$

(2) Intégrale de Riemann impropre en 0:
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \textit{ converge } \iff \alpha < 1.$$

⚠ **Attention!** La convergence des intégrales de Riemann dépend de l'intervalle d'intégration. On fera donc bien attention à ne pas confondre les deux critères!

☞ En particulier, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ **diverge** pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.2 Critère de comparaison par inégalité (pour des fonctions positives)

Dans les trois prochains résultats on considère une fonction f continue sur $[a;b[$ (avec $b \in \overline{\mathbb{R}}$). Naturellement, ces résultats s'adaptent à des fonctions continues et positives sur $]a;b]$ (avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$).

Théorème 2. *Soient f et g deux fonctions continues et* ***positives*** *sur $[a;b[$ (avec $b \in \overline{\mathbb{R}}$) telles que*

$$\forall t \in [a;b[\,, \qquad 0 \leq f(t) \leq g(t).$$

Alors,

$$\int_a^b g(t)\mathrm{d}t \text{ converge } \Longrightarrow \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ converge;} \tag{1}$$

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ diverge } \Longrightarrow \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \text{ diverge.} \tag{2}$$

Exercice 9. Déterminer la nature des intégrales

$$(i) \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t, \quad (ii) \int_0^1 \frac{e^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t.$$

3.3 Critère de comparaison par négligeabilité (pour des fonctions positives)

Théorème 3. *Soient f et g deux fonctions continues et* ***positives*** *sur $[a;b[$ telles que*

$$f(t) \underset{b}{=} o(g(t)).$$

(1) Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

(2) Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ diverge.

Exercice 10. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} t^2 e^{-t^2}$ puis en déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

3.4 Critère de comparaison par équivalence (pour des fonctions positives)

Théorème 4. *Soient f et g deux fonctions continues et* ***positives*** *sur $[a;b[$ telles que*

$$f(t) \underset{b}{\sim} g(t).$$

Alors, les intégrales $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ ont la même nature.

Exercice 11. Déterminer, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-\sqrt{t}}{(1+t)^\alpha}\mathrm{d}t$.

3.5 Fonctions de signe quelconque

Définition 5. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est* ***absolument convergente*** *si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ est convergente.*

Théorème 5. *Si l'intégrale de f sur $[a;+\infty[$ converge absolument, alors elle est convergente*

$$\int_a^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t \text{ converge } \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

⚠ **La réciproque est fausse!** (L'intégrale peut être convergente sans être absolument convergente.)

4 Autres exercices

Exercice 12. Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes ainsi que leur valeur en cas de convergence.

$$(i)\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}, \qquad (ii)\ \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}, \qquad (iii)\ \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\mathrm{d}x,$$

$$(iv)\ \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\mathrm{d}x, \qquad (v)\ \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{3^t}, \quad (vi)\ \int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x.$$

Exercice 13. Déterminer la nature des intégrales suivantes

$$(i)\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3+3t^2+1}}, \qquad (ii)\ \int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x, \qquad (iii)\ \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3\ln(t)},$$

$$(iv)\ \int_0^{+\infty} u^k e^{-u^2}\mathrm{d}u \quad (k \in \mathbb{N}), \qquad (v)\ \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t(t-1)}, \qquad (vi)\ \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x.$$

Exercice 14. Soit f une fonction continue sur $[1;+\infty[$. Montrer que

$$\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ converge } \Longrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t \text{ converge }.$$

Exercice 15. Soit f la fonction définie sur $[2;+\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{t(\ln(t))^2}$.

(1) Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$?
(2) Étudier les variations de f.
(3) En déduire que, pour tout $k \geq 2$, on a l'encadrement

$$\frac{1}{(k+1)(\ln(k+1))^2} \leq \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k((\ln(k))^2}.$$

(4) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$.

Exercice 16. Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\mathrm{d}t$.

(1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
(2) Soient x, y deux réels strictement positifs tels que $x < y$. Comparer $f(x)$ et $f(y)$ puis en déduire les variations de f.
(3) On **admet** que f est continue sur son ensemble de définition.
   (a) Déterminer $f(x) + f(x+1)$, pour $x > 0$.
   (b) En déduire la limite de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 17. (D'après **EML 2017**) On considère la fonction $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = e^x - e\ln(x).$$

(1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ converge et la calculer.
(2) L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge-t-elle?
(3) (a) Montrer que, pour tout $x \in [2;+\infty[$, $2\ln(x) \leq \dfrac{e^x}{3}$.
   (b) Montrer alors la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$.

Exercice 18. (D'après **EDHEC 2004**)

Le but de cet exercice est de calculer $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $u_n=\int_0^1\frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$ et on a, en particulier, $u_0=\int_0^1\frac{1}{2+t}dt$.

(1) Pour tout n de $\mathbb{N}$, justifier lexistence de u_n.
(2) Calculer u_0 et u_1.
(3) (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
 (b) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq\ln(2)$.
 (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
(4) (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln(2)-u_n$ sous la forme dune intégrale.
 (b) En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\ln(2)-u_n\leq\frac{1}{n+1}$.
 (c) Donner la limite de la suite (u_n).
(5) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $v_n=\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$.
 (a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant v_n.
 (b) Montrer que : $\forall n\geq 2,\ 0\leq v_n\leq\frac{1}{n-1}$.
 (c) En déduire $\lim_{n\to+\infty}v_n$, puis donner la valeur de $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$.

Exercice 19. On pose, pour tout réel $x>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$J_0(x)=1-e^{-x},\quad\text{et}\quad\frac{1}{n!}\int_0^x t^ne^{-t}\mathrm{d}t.$$

(1) Calculer, pour tout réel $x>0$, $J_1(x)$.
(2) Établir, pour tout réel $x>0$ et pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, une expression de $J_n(x)$ sous forme de somme.
(3) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty}t^ne^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente et calculer sa valeur.
(4) On note $I_n=\int_0^1 e^{n(x+\ln(1-x))}\mathrm{d}x$. À l'aide du changement de variable $t=n(1-x)$, montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$I_n=n!\frac{e^n}{n^{n+1}}J_n(n).$$

Exercice 20. On considère, pour $n\in\mathbb{N}^*$, les fonctions f_n et h définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f_n(x)=\frac{n\ln(x)}{n+1+nx^2},\qquad h(x)=\frac{\ln(x)}{1+x^2}.$$

(1) Montrer que les fonction f_n et h sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier leur signe.
(2) (a) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ est convergente et déterminer sa valeur.
 (b) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty}h(x)\mathrm{d}x$ converge. On notera K sa valeur.
(3) (a) Montrer, grâce au changement de variable $u=1/x$ que $K=-\int_0^1 h(u)\mathrm{d}u$.
 (b) En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty}|h(u)|\mathrm{d}u$ converge et est égale à $2K$.

(c) En déduire également que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(u)\mathrm{d}u$ converge et vaut 0.

(4) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on a $|f_n(x)| \leq |h(x)|$. En déduire la convergence de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x.$$

Exercice 21. (D'après **EML 2013**)

Partie I - Calcul d'une intégrale dépendant d'un paramètre

On considère l'application $g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0;1]$, par :
$$g(t) = \begin{cases} -t\ln(t), & \text{si} \quad 0 < t \leq 1 \\ 0, & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

(1) Montrer que g est continue sur $[0;1]$.

(2) A l'aide d'une intégration par parties, calculer, pour tout $x \in]0;1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 g(t)\mathrm{d}t$.

(3) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}$.

Partie II - Exemple de densité

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :
$$f(t) = \begin{cases} -t\ln t + t^{1/3}, & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

(1) Montrer que f est continue sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$. Est-ce que f est continue en 1?

(2) Établir que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$.

(3) Montrer que f est une densité.

(4) (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;1[$ et calculer $f'(t)$ et $f''(t)$ pour tout $t \in]0;1[$.

(b) En déduire que l'équation $f'(t) = 0$ d'inconnue $t \in]0;1[$, admet une solution et une seule, notée α, et montrer que
$$\frac{1}{\mathrm{e}} < \alpha < 1.$$

(c) Écrire un programme en `SciLab` qui calcule et affiche une valeur approchée de α à 10^{-3} près, mettant en œuvre l'algorithme de dichotomie.

Partie III - Calcul d'une fonction de répartition

On admet qu'il existe une variable aléatoire X ayant f pour densité (l'application f a été définie au début de la partie **II**) et on note F la fonction de répartition de X.

(1) Calculer, pour tout $x \in]0;1[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t$. (On pourra utiliser le résultat obtenu à la question **I.2.**)

(2) Calculer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(3) Tracer l'allure de la courbe représentative de F.