ECE 2 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Chapitre 8. Rappels et compléments sur les v.a.r à densité

1 Variables aléatoires à densité

1.1 Variable aléatoire à densité et fonction de répartition

La définition d'une variable aléatoire à densité étant portée sur une propriété de sa fonction de répartition, on rappelle la définition et les propriétés de celle-ci valable pour tout v.a.r.

Définition 1 (Fonction de répartition d'une variable aléatoire)**.** *Si X est une variable aléatoire, la fonction de répartition de X est la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = P([X \leq x]).$$

Proposition 1 (Caractérisation d'un fonction de répartition)**.** Une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X si et seulement si

(1) F est croissante sur $\mathbb{R}$;
(2) F est continue à droite en tout point;
(3) F admet des limites en $-\infty$ et $+\infty$ et vérifie $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

☞ La fonction de répartition est toujours continue par morceaux mais pas (forcément) continue partout sur $\mathbb{R}$.

Définition 2. *On dit qu'une variable aléatoire X est* ***une variable aléatoire à densité*** *si sa fonction de répartition F_X vérifie:*

(1) F_X est continue sur $\mathbb{R}$;
(2) F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.

1.2 Densité de probabilité

Définition 3. *Soient X une variable aléatoire réelle et F_X sa fonction de répartition. Alors, toute fonction f positive sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = F'_X(x)$ (là où F_X est $\mathcal{C}^1$) est appelée* ***une densité*** *de X.*

☞ La variable X admet une infinité de densités qui ne diffèrent toutes que d'un nombre fini de points (qui sont éventuellement ceux où F_X n'est pas dérivable).

✎ **Méthode.** Connaissant la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire à densité X, on obtient donc une densité de X en dérivant F_X en tout point où elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et en donnant une valeur arbitraire ailleurs.

Exercice 1. Soient $a > 0$ et Z une v.a dont la fonction de répartition est

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax^2}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

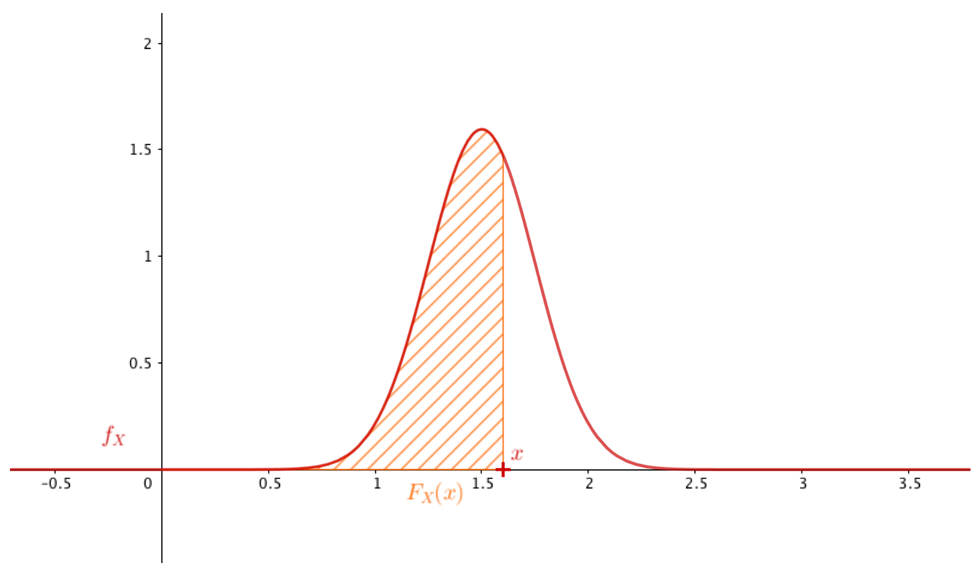
(1) Vérifier que Z est une variable à densité puis déterminer une densité f de Z.
(2) On considère la variable $Y = Z^2$ et on note G sa fonction de répartition. Exprimer G en fonction de F puis vérifier que Y est une variable aléatoire à densité.

Théorème 1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :*
(i) f est positive sur $\mathbb{R}$;
(ii) f est continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points;
(iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$.
Alors il existe une variable aléatoire X telle que f soit une densité de la variable X. On dit alors que f est une ***densité de probabilité****.*

Proposition 2. Si f est une densité d'une v.a. X, alors la fonction de répartition F_X de X est donnée par

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

☞ Notant f_X une densité de la variable X, la fonction de la répartition F_X évaluée en x représente l'aire du domaine sous la courbe de f_X jusqu'à x.



Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } |x| < 1 \\ \frac{1}{2x}, & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

(1) (a) Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.
(b) Déterminer la fonction de répartition de X.

(2) Mêmes question avec

$$g(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}, & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(3) Soient $\lambda > 0$ et

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que f_λ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X. *On rappelle qu'on dit que X suit une loi exponentielle de paramètre λ, $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.*
(b) Expliciter la fonction de répartition de X.

1.3 Calcul de probabilités

Proposition 3. Soit X une variable aléatoire admettant une densité f_X. On note F_X sa fonction de répartition.

(1) Pour tout réel x, on a
$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t = F_X(x) \qquad \text{et} \qquad P(X \geq x) = \int_{x}^{+\infty} f_X(t)\mathrm{d}t = 1 - F_X(x);$$

(2) Pour tout réels a et b tels que $a \leq b$, on a
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(t)\mathrm{d}t = F_X(b) - F_X(a);$$

(3) Pour tout réel a, on a
$$P(X = a) = 0.$$

Remarque 1.

- Les probabilités $P(X \leq x)$, $P(X \geq x)$ et $P(a \leq X \leq b)$ s'interprètent comme des aires sous la courbe représentative de la densité f.
- Les inégalités strictes ou larges ne changent pas les probabilités: $P(X < x) = P(X \leq x)$ et
$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b).$$
- Contrairement aux variables discrètes, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(X = x) = 0$. Ainsi la loi de X n'est pas donnée par les probabilités $P(X = x)$ mais plutôt par la fonction de répartition ou de la densité.

Exercice 3. Soient Z la v.a. définie dans l'Exercice 1. Calculer
$$P(Z \leq 1/2), \qquad P(Z \in [-1; 1/2[), \qquad P(Z \geq 1/2), \qquad P_{Z \geq 1/2}(Z < 3/4).$$

✎ **Méthode.** (Transformation affine d'une variable à densité.)

Soit X une variable aléatoire de densité f_X et de fonction de répartition F_X. Alors, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, $aX + b$ est encore une variable aléatoire à densité. On commence par déterminer sa fonction de répartition comme suit. Si $a > 0$,
$$\begin{aligned} F_{aX+b}(x) &= P(aX + b \leq x) \\ &= P(aX \leq x - b) = P\left(X \leq \frac{x-b}{a}\right) \\ &= F_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \end{aligned}$$

Si, par contre, $a < 0$, alors de manière analogue
$$F_{aX+b}(x) = P\left(X \geq \frac{x-b}{a}\right) = 1 - F_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

On obtient ensuite une densité en dérivant la fonction de répartition.

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } x \in [-1; 1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

(1) Montrer que f est une densité de probabilité, d'une variable aléatoire que l'on notera X.
(2) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.
(3) Déterminer la fonction de répartition, puis une densité de la variable aléatoire $Y = 1 - 2X$.

2 Moments d'une v.a à densité

2.1 Espérance d'une variable aléatoire à densité

Définition 4. *Soit X une variable aléatoire de densité f. On dit que X admet une espérance si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ est* ***absolument convergente****. Auquel cas,*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 5. Montrer que la variable aléatoire X définie à l'Exercice 1 admet une espérance, puis la calculer.

Exercice 6. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2x}}, & \text{si } x \geqslant 2 \\ 0, & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

(1) Montrer la convergence et calculer l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{2x}}\mathrm{d}x.$$

(2) Montrer que f est une densité de probabilité d'une v.a. que l'on notera X.
(3) Donner la fonction de répartition F_X de X.
(4) X admet-elle une espérance?

Proposition 4 (Linéarité de l'espérance)**.** Soient X et Y deux variables aléatoires à densité admettant une espérance.

- Pour tous réels a et b, on a : $E(aX + b) = aE(X) + b$.
- Si $X + Y$ est une variable à densité alors elle admet une espérance et on a

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

2.2 Théorème de transfert et moment d'ordre r

Théorème 2 (Théorème de transfert)**.** *Soient X est une variable aléatoire de densité f et φ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.*
Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)f_X(t)\mathrm{d}t$ est ***absolument convergente****, alors la variable aléatoire $\varphi(X)$ admet une espérance et on a*

$$E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)f_X(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 7. Soit X une v.a. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. La variable e^X admet-elle une d'espérance ?

Définition 5. *Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente alors on dit que X* ***admet un moment d'ordre*** *r, notée $m_r(X)$ et on a*

$$m_r(X) = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\mathrm{d}t.$$

2.3 Variance et écart-type

Définition 6. *Si la variable aléatoire X admet une espérance et si la variable $(X - E(X))^2$ admet une espérance, on appelle* ***variance de*** *X le réel*

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right).$$

Proposition 5. Une variable à densité X admet une variance si et seulement X admet un moment d'ordre 2 et dans ce cas

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire de densité f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 2/x^3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

Définition 7. *Si X admet une variance alors $V(X) \geq 0$. On appelle alors* ***écart-type*** *le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.*

Proposition 6. Soit X une variable à densité admettant une variance.
Alors pour tout réels a et b, $aX + b$ admet une variance et on a $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Définition 8.

- *Si X est une variable à densité telle que $E(X) = 0$ on dit que X* ***est une variable centrée.***
- *Si X est une variable à densité telle que $\sigma(X) = 1$, on dit que X* ***est une variable réduite.***
- *Si X admet une espérance et un écart-type non nul, on appelle* ***variable centrée-réduite associée à*** *X la variable*

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}.$$

3 Lois à densité usuelles

3.1 Loi uniforme continue (sur un segment)

Définition 9 (Loi uniforme sur un segment)**.** *Une variable aléatoire X suit la* ***loi uniforme*** *sur $[a\,;\,b]$, notée $\mathcal{U}([a\,;\,b])$, si une densité de X est la fonction f définie par*

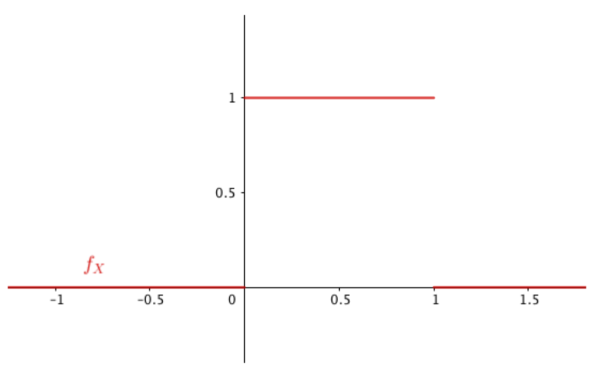
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \textit{si } x \in [a\,;\,b] \\ 0, & \textit{sinon.} \end{cases}$$

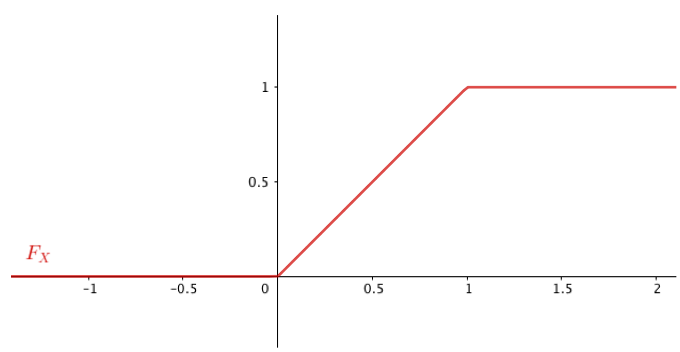
⚠ On ne confondra pas la loi uniforme continue et la loi uniforme discrète!

Proposition 7 (Fonction de répartition pour la loi uniforme)**.** La fonction de répartition d'une variable qui suit la loi $\mathcal{U}([a\,;\,b])$ est la fonction F définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{si } x \in [a\,;\,b] \\ 1, & \text{si } x > b. \end{cases}$$

☞ On représente ci-dessous une densité f_X et la fonction de répartition F_X de la loi uniforme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$.





Exercice 9. À partir de 7 heures du matin, les bus passent toutes les quinze minutes à un arrêt précis. Un usager se présente à cet arrêt entre 7h et 7h30. On fait l'hypothèse que l'heure exacte de son arrivée, représentée par le nombre de minutes après 7h, est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0;30]$. Quelle est la probabilité que l'usager attende moins de cinq minutes le prochain bus?

Proposition 8 (Espérance et variance pour la loi uniforme)**.** Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a\,;\,b])$, alors X admet une espérance et une variance et

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Proposition 9. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1]) \iff Y = (b-a)X + a \hookrightarrow \mathcal{U}([a;b]).$$

3.2 Loi exponentielle

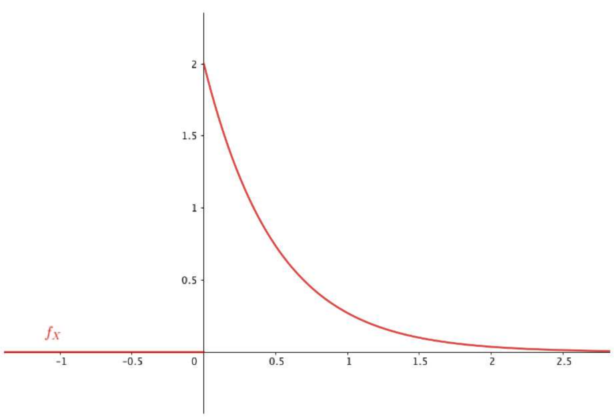
Définition 10 (Loi exponentielle)**.** *Une variable aléatoire X suit la* ***loi exponentielle*** *de paramètre λ (où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$), notée $\mathcal{E}(\lambda)$, si une densité de X est la fonction f définie par*

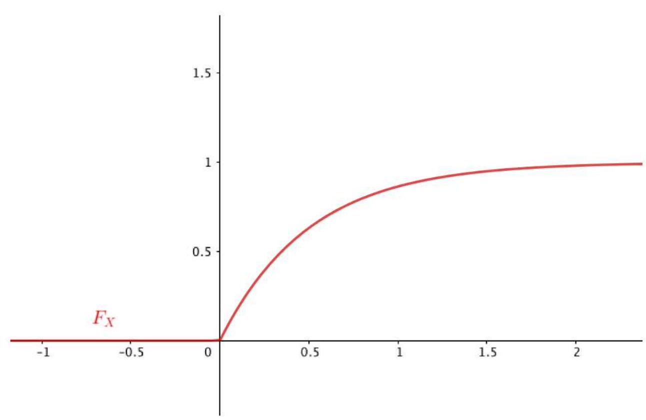
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & si\ \ x \geq 0 \\ 0, & sinon. \end{cases}$$

Proposition 10 (Fonction de répartition pour la loi exponentielle)**.** La fonction de répartition d'une variable qui suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ est la fonction F définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } \ x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

☞ On représente ci-dessous une densité f_x ainsi que la fonction de répartition F_X d'une loi exponentielle $X \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$.





Proposition 11 (Espérance et variance pour la loi exponentielle)**.** Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors X admet une espérance et une variance et :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{et} \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Définition 11 (Loi sans mémoire)**.** *On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs positives suit une loi* ***sans mémoire*** *lorsque pour tout couple (t,h) de réels positifs,*

$$P([X > t+h]) = P([X > t])P([X > h]),$$

ou bien si $P([X > h]) \neq 0$,

$$P_{[X>h]}([X > t+h]) = P([X > t]).$$

Théorème 3 (Caractérisation de la loi exponentielle)**.** *Les variables aléatoires suivant une loi exponentielle (et la variable quasi-certaine nulle) sont les seules variables aléatoires à densité positives sans mémoire.*

3.3 Les lois normales

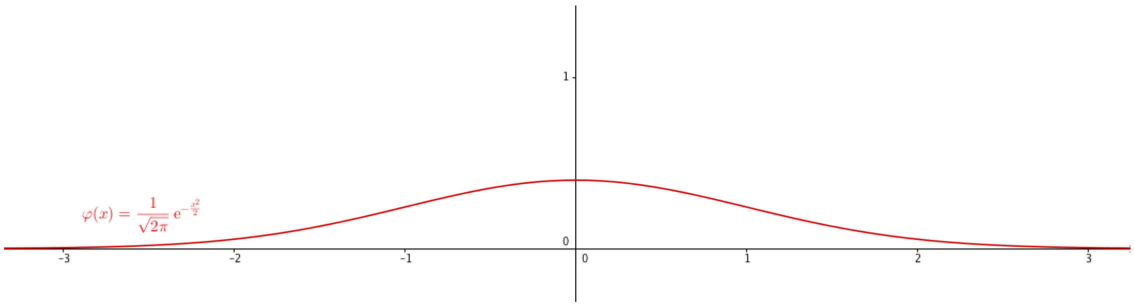
Grâce aux critères de convergence pour les intégrales rappelés au chapitre précédent, on peut montrer la convergence de l'intégrale suivante dont on ne peux par contre, avec le programme d'ECE, qu'admettre la valeur:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}.$$

Loi normale centrée réduite

Définition 12. *Une variable aléatoire X suit la* ***loi normale centrée réduite****, notée $\mathcal{N}(0,1)$, si une densité de X est la fonction φ définie par*

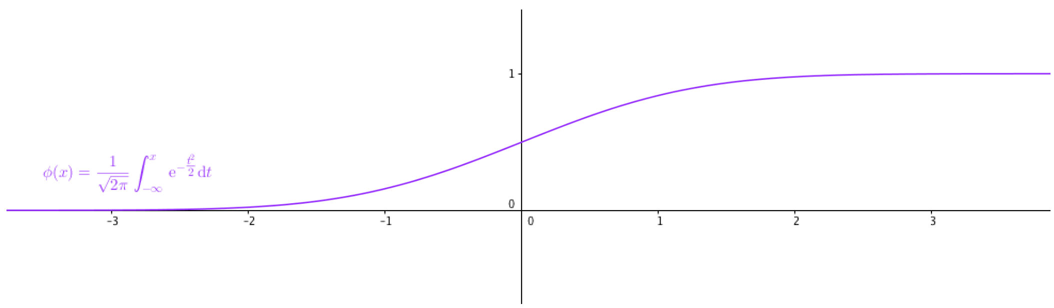
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$



Proposition 12 (Fonction de répartition pour la loi normale centrée réduite)**.** La fonction de répartition d'une telle variable aléatoire est la fonction, notée ϕ, définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t.$$

Remarque 2. On ne sait pas exprimer la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite à l'aide des fonctions usuelles.



On dispose par contre de quelques règles de calculs ainsi que d'une table de valeurs (voir Appendice).

Proposition 13. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

(i) Comme la densité φ est une fonction paire, on a

$$\phi(0) = P(X \leq 0) = \frac{1}{2}.$$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\phi(-x) = 1 - \phi(x).$$

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$P(|X| \leq x) = 2\phi(x) - 1.$$

Exercice 10. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Déterminer, à l'aide de la table de la loi normale centrée réduite fournie en appendice, $x > 0$ tel que $P(-x \leq X \leq x) \simeq 0,95$.

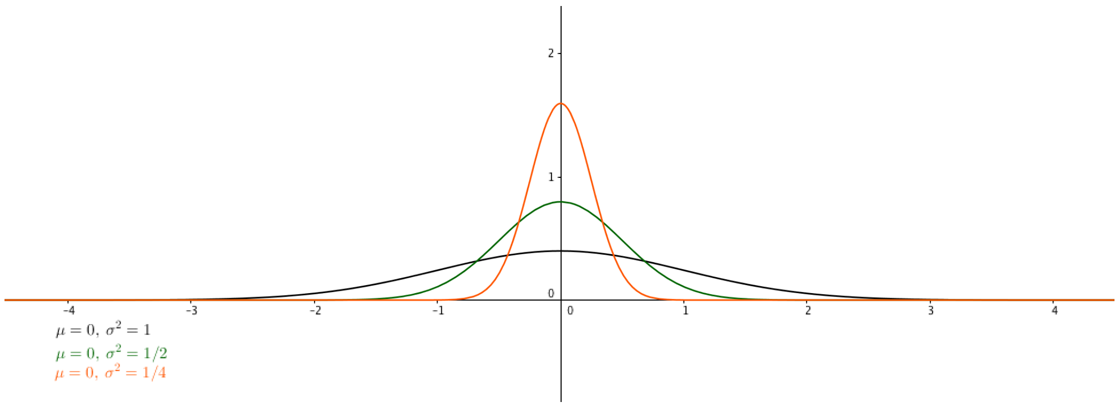
Proposition 14 (Espérance et variance pour les loi normales centrée réduite)**.** Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors X admet une espérance et une variance et on a

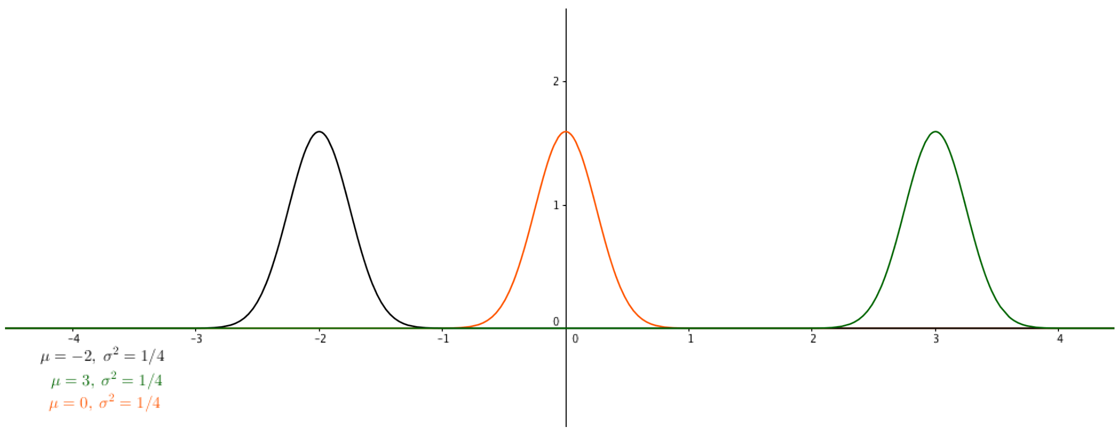
$$E(X) = 0 \qquad \text{et} \qquad V(X) = 1.$$

Loi normale ou loi de Laplace-Gauss

Définition 13. *Une variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres (μ, σ^2), notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (où $\sigma > 0$), si une densité de X est la fonction $\varphi_{\mu,\sigma}$ définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$





Proposition 15 (Espérance et variance pour les loi normales)**.** Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors X admet une espérance et une variance et on a

$$E(X) = \mu \qquad \text{et} \qquad V(X) = \sigma^2 \quad \text{donc} \ \ \sigma(X) = \sigma.$$

☞ Toute variable aléatoire suivant une loi normale peut se ramener par une transformation affine à la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Proposition 16 (Changements de variables normales)**.**

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff X^* = \frac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Exercice 11. Pour cette exercice, on utilisera la table de la loi normale centrée réduite, fournie en appendice.

(1) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(8,4)$. Donner des valeurs approchées pour

$$P(X < 7,5),\ P(X > 8,5),\ P(6,5 < X < 10),\ P(X > 6|X > 5).$$

(2) Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale. Déterminer l'espérance et la variance de X sachant que

$$P(X < -1) \simeq 0,05 \quad \text{et} \quad P(X > 3) \simeq 0,12.$$

Exercice 12. (D'après **ECRICOME 2009**)

Sur une ligne de bus, une enquête a permis de révéler que le retard (ou l'avance) sur l'horaire officiel du bus à une station donnée, peut être représenté(e) par une variable aléatoire réelle, notée X, exprimée en minutes, qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

On admet de plus que la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes est égale à $p = 0.8413$ et que l'espérance de X est de 5 minutes.

(1) Déterminer la valeur de σ en utilisant la table jointe en annexe.
(2) Quelle est la probabilité que le retard soit supérieur à 9 minutes ?
(3) Sachant que le retard est supérieur à 3 minutes, quelle est la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes ? (On exprimera cette probabilité à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, puis on utilisera la table jointe en appendice).

4 Autres exercices

Exercice 13. Dans une station-service, la demande hebdomadaire en essence, en milliers de litres, est une variable aléatoire X de densité

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x)^4, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

(1) Déterminer c.
(2) La station est réapprovisionnée chaque lundi à 20h. Quelle doit être la capacité du réservoir d'essence pour que la probabilité d'épuiser ce réservoir soit inférieure à 10^{-5}?

Exercice 14. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que :

$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \iff \lambda X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \qquad \text{et} \qquad X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \iff \frac{1}{\lambda} X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda).$$

Exercice 15. Soient $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$ et $\lambda > 0$. On pose $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$.

(1) Déterminer la loi de V. Préciser son espérance et sa variance.
(2) Déterminer une densité de $Z = \dfrac{1}{V}$.

Exercice 16. Trois personnes, notées A, B et C entrent simultanément dans une agence bancaire disposant de deux guichets. Les clients A et B occupent simultanément à l?instant 0 les deux guichets tandis que C attend que l'un des deux guichets se libère pour se faire servir.

On suppose que les durées de passage au guichet des trois personnes A, B et C sont mesurées en heures et on suppose que ce sont des variables aléatoires indépendantes, notées respectivement X, Y et Z et suivant toutes la loi uniforme sur $[0;1[$.

On suppose également que la durée du changement de personne à un guichet est négligeable. On pose $U = \min(X, Y)$ et on admet que U est une variable aléatoire. On note T le temps total passé par C dans l'agence bancaire.

(1) Montrer que la fonction de répartition F_U de U est définie par

$$F_U(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(2) En déduire que U est une variable aléatoire à densité et donner une densité de U.
(3) Déterminer l'espérance de U.
(4) Exprimer T en fonction de certaines variables précédentes puis en déduire $E(T)$.

Exercice 17. Soient $X_0, X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires (indépendantes) suivant une même loi uniforme sur $[0;1]$. Pour $k \in [\![0;n]\!]$, on note

$$U_k = \min(X_0, X_1, ..., X_k).$$

Montrer que U_k est une variable à densité que l'on déterminera.

Exercice 18. Soient m et σ deux réels. On dit que X suit une loi *log-normale* de paramètres (m, σ^2) si $Y = \ln(Y)$ suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On supposera dans la suite $m = 0$ et $\sigma = 1$.

(1) Exprimer la fonction de répartition de X à l'aide de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.
(2) Calculer sa densité.
(3) Montrer que $E(X) = \sqrt{e}$.

Exercice 19. (Partie entière d'une loi exponentielle - D'après **EDHEC 2002**)

Pour tout nombre réel x, on note $[x]$ la partie entière de x, c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant : $[x] \leqslant x < [x] + 1$.
Soit X la variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).
On pose $Y = [X]$, Y est donc la partie entière de X et on a : $\forall k \in \mathbb{Z} \quad (Y = k) = (k \leqslant X < k + 1)$

(1) (a) Montrer que Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
 (b) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, calculer $P(Y = k - 1)$.
 (c) En déduire que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
 (d) Donner l'espérance et la variance de $Y + 1$. En déduire l'espérance et la variance de Y.
(2) On pose $Z = X - Y$.
 (a) Déterminer $Z(\Omega)$.
 (b) En utilisant le système complet d'événements $(Y = k)_{k \in \mathbb{N}}$, montrer que :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad P(Z \leqslant x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}$$

 (c) En déduire une densité f de Z.
 (d) Déterminer l'espérance $E(Z)$ de Z. Ce résultat était-il prévisible ?

Exercice 20. (D'après **ESSEC I 2017**)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$. On dit qu'une variable aléatoire réelle à densité suit une loi de Laplace de paramètre (α, β), notée $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$, si elle admet comme densité la fonction f donnée par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|t - \alpha|}{\beta}\right)$$

(1) Vérifier que f est bien une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle.
(2) Déterminer la fonction de répartition, notée Ψ, de la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.

(3) On suppose que X suit la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.
 (a) Montrer que $\beta X + \alpha$ suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.
 (b) En déduire la fonction de répartition de la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

(4) *Espérance et variance.*
 (a) On suppose que X suit la loi $\mathcal{L}(0, 1)$.
 Montrer que $E(X)$ et $V(X)$ existent et valent respectivement 0 et 2.
 (b) En déduire l'existence et les valeurs de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire réelle qui suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

Exercice 21. (D'après **EML 2011**)

On note U une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

(1) Rappeler la loi de U, son espérance et sa variance.

On considère une variable aléatoire T telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0;+\infty[\,, \quad \mathrm{P}_{(U=n)}\left(T > t\right) = e^{-nt}.$$

(2) (a) Montrer que

$$\forall t \in [0;+\infty[\,, \quad \mathrm{P}\left(T > t\right) = \frac{p\ e^{-t}}{1 - q\ e^{-t}}.$$

(b) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire T.

(c) En déduire que T est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.

(3) On note $Z = UT$.

(a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in [0;+\infty[\,, \quad \mathrm{P}_{(U=n)}\left(Z > z\right) = e^{-z}.$$

(b) En déduire que la variable aléatoire Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

(c) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in [0;+\infty[\,, \quad \mathrm{P}\left(U = n\ ,\ Z > z\right) = \mathrm{P}\left(U = n\right)\mathrm{P}\left(Z > z\right).$$

Exercice 22. (D'après **ECRICOME 2008**)

Un joueur lance trois fléchettes dans une cible circulaire de centre O et de rayon 1. Pour $1 \leq i \leq 3$, on note X_i la variable aléatoire égale à la distance du point d'impact de centre O de la $i^{\text{ème}}$ fléchette.

Ces trois variables aléatoires X_1, X_2, X_3 de même loi, indépendantes, sont des variables à densité dont une densité f est définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si} \quad x \in [0;1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Le joueur gagne si la distance la plus proche du centre O se trouve à une distance inférieure à $\frac{1}{5}$ de ce centre.

Enfin, on note M la variable aléatoire représentant la plus petite des trois distances X_1, X_2, X_3.

(1) Vérifier que f est une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition F de X_i.

(2) Déterminer l'espérance de X_i.

(3) Exprimer l'événement $[M > t]$ à l'aide des événements $[X_1 > t], [X_2 > t], [X_3 > t]$ pour tout réel t.

(4) Déterminer la fonction de répartition F_M de M et montrer que M est une variable à densité et en donner une densité notée f_M.

(5) Quelle est la probabilité de l'événement $G =$"le joueur gagne la partie"?

Exercice 23. (D'après **EDHEC 2017**)

Soit V une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, dont la fonction de répartition est la fonction F_V définie par :

$$F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

On pose $W = -\ln(V)$ et on admet que W est aussi une variable aléatoire dont le fonction de répartition est notée F_W. On dit que W suit une loi de Grumbel.

(1) (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_W(x) = e^{-e^{-x}}$.
(b) En déduire que W est une variable à densité.

On désigne par n un entier naturel non nul et par $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi que V, c'est à dire la loi $\mathcal{E}(1)$.

On considère la variable aléatoire Y_n définie par $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, c'est à dire que pour tout ω de Ω, on a : $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$. On admet que Y_n est une variable aléatoire à densité.

(2) (a) Montrer que la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n est définie par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - e^{-x})^n & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(b) En déduire une densité f_{Y_n} de Y_n.

(3) (a) Donner un équivalent de $1 - F_{Y_n}(t)$ lorsque t est au voisinage de $+\infty$, puis montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\,\mathrm{d}t.$$

(b) Établir l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\mathrm{d}t = x\,(1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\mathrm{d}t.$$

(c) Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} x\,(1 - F_{Y_n}(x)) = 0.$$

(d) En déduire que Y_n possède une espérance et prouver l'égalité :

$$E(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n})\,\mathrm{d}t.$$

(4) (a) Montrer, grâce au changement de variable $u = 1 - e^{-t}$, que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{1-e^{-x}} \frac{1 - u^n}{1 - u}\mathrm{d}u.$$

(b) En déduire que

$$\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1 - e^{-x})^k}{k}$$

puis donner $E(Y_n)$ sous forme de somme.

Exercice 24. (D'après **EDHEC 2005**) Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif. On considère la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} a(1-t)^{a-1}, & \text{si } t \in [0,1[\\ 0, & \text{si } t \notin [0,1[\end{cases}$$

(1) Pour tout x de $[0,1[$, calculer
$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(2) En déduire que
$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$
est une intégrale convergente et donner sa valeur.

(3) Montrer que f peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.

On considère maintenant une variable aléatoire X admettant f comme densité et on note F sa fonction de répartition.

(4) Expliciter $F(x)$ pour tout réel x.

On se propose de déterminer l'espérance $E(X)$et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X. Pour ce faire, on pose $Y = -\ln(1-X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité. On note alors G sa fonction de répartition.

(5) (a) Pour tout réel x positif, exprimer $G(x)$ en fonction de x.
(b) En déduire que Y suit la loi exponentielle de paramètre a.

(6) (a) Pour tout réel $\lambda > 0$, donner la valeur de
$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\mathrm{d}x.$$
(b) En déduire que la variable aléatoire e^{-Y} possède une espérance et donner sa valeur en fonction de a.
(c) Exprimer X en fonction de Y, puis en déduire que X possède une espérance dont on donnera l'expression en fonction de a.
(d) Montrer que la variable aléatoire e^{-2Y} possède une espérance et que $E\left(e^{-2Y}\right) = \dfrac{a}{a+2}$.
En déduire la variance de e^{-Y} puis la variance de X.

Exercice 25. (D'après **EDHEC 2009**)

Dans tout l'exercice λ désigne un réel strictement positif. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$h(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(1) (a) En se référant éventuellement à une loi exponentielle, montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x$$

puis donner sa valeur.

(b) Montrer que h peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire X.

(c) Montrer la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} xh(x)\mathrm{d}x$$

puis donner sa valeur. En déduire que X possède une espérance et la déterminer.

(2) Dans cette question, on considère une variable aléatoire Y de densité f, nulle sur $]-\infty;0[$, continue sur $[0;+\infty[$ et strictement positive sur $[0;+\infty[$. On note alors F la fonction de répartition de Y. Justifier que, pour tout réel x, on a: $1 - F(x) > 0$.

On définit alors la fonction g par:

$$g(x) = \begin{cases} -f(x)\ln(1 - F(x)), & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(3) (a) Montrer que g est positive sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que g est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $[0;+\infty[$.

(c) En remarquant que, si l'on pose $u'(x) = -f(x)$, on peut choisir $u(x) = 1 - F(x)$, montrer grâce à une intégration par parties la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$$

et que cette intégrale vaut 1.

(d) Établir que g peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire Z.

(4) **Étude d'un cas particulier**.
Vérifier que la variable aléatoire Y suivant la loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$) vérifie les conditions imposées dans la deuxième question. Montrer alors que Z suit la même loi que X.

Exercice 26. (D'après **EDHEC 2003**)

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul.

(1) Montrer que la fonction f_n définie ci-dessous est une densité de probabilité

$$f_n(x) = \begin{cases} nx^{n-1}, & \text{si } x \in [0;1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

(2) On considère une variable aléatoire X_n réelle dont une densité de probabilité est f_n. On dit alors que X_n suit une *loi monôme* d'ordre n.

(a) Reconnaître la loi de X_1.
(b) Dans le cas où n est supérieur ou égal à 2, déterminer la fonction de répartition F_n de X_n, ainsi que son espérance $E(X_n)$ et sa variance $V(X_n)$.

(3) On considère deux variables aléatoires U_n et V_n définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant la loi monôme d'ordre n $(n \geqslant 2)$ et indépendantes, c'est-à-dire qu'elles vérifient en particulier l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(U_n \leqslant x \cap V_n \leqslant x) = P(U_n \leqslant x)\, P(V_n \leqslant x).$$

On pose $M_n = \sup(U_n, V_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(a) Pour tout réel x, écrire, en justifiant la réponse, l'événement $(M_n \leqslant x)$ à l'aide des événements $(U_n \leqslant x)$ et $(V_n \leqslant x)$.
(b) En déduire une densité de M_n. Vérifier que M_n suit une loi monôme dont on donnera l'ordre, puis déterminer sans calcul $E(M_n)$.
(c) On pose $T_n = \inf(U_n, V_n)$. Exprimer $M_n + T_n$ en fonction de U_n et V_n, puis en déduire, sans calcul d'intégrale, la valeur de $E(T_n)$.

5 Appendice: Table de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$

$$\phi(t)(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \phi(-x) = 1 - \phi(x).$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000