ECE 2 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Chapitre 9. Couples (et suites) de V.A. discrètes

1 Couples aléatoires discrets

On considère deux variables aléatoires discrètes X et Y, avec $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ fini ou dénombrable.

Définition 1.
On appelle couple aléatoire discret une application $V : \Omega \mapsto \mathbb{R}^2$.
Ainsi, on peut écrire $V = (X, Y)$, où X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, avec :

$$\forall \omega \in \Omega,\ V(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))\,.$$

1.1 Loi conjointe

Définition 2 (Loi conjointe)**.**
La loi conjointe du couple (X, Y) est la donnée de la fonction :

$$\begin{array}{rccl} \varphi_{X,Y} : & X(\Omega) \times Y(\Omega) & \to & [0,\ 1] \\ & (x, y) & \mapsto & P\left([X = x], [Y = y]\right) \end{array}$$

où $P\left([X = x], [Y = y]\right)$ est une notation pour signifier $P\left([X = x] \cap [Y = y]\right)$.

✎ **Méthode.** Pour obtenir la loi du couple (X, Y), on commence par déterminer $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ puis on donne les valeurs de $P([[X = x] \cap [Y = y]])$ pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$.
Lorsque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, on peut résumer cette loi dans un tableau à double entrée.

☞ On peut parfois utiliser la formule des probabilités composées

$$P\left([X = x] \cap [Y = y]\right) = P_{[Y=y]}([X = x])P([Y = y]).$$

⚠ La probabilité $P\left([X = x] \cap [Y = y]\right)$ n'est *a priori* pas égale à $P\left([X = x]\right) \cdot P\left([Y = y]\right)$.

Exercice 1. Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. On tire successivement, avec remise, deux boules de l'urne. On appelle X la somme des numéros obtenus et Y la valeur absolue de la différence entre les deux numéros obtenus.

(1) Préciser Ω, $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
(2) Déterminer la loi du couple (X, Y).
(3) Quels sont les couples $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ qui vérifient $[[X = x] \cap [Y = y]] = \emptyset$?

☞ L'exercice ci-dessus permet de voir notamment que $V(\Omega) \subsetneq X(\omega) \times Y(\Omega)$.

Proposition 1. On a :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} P\left([X = x] \cap [Y = y]\right) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{x \in X(\Omega)} P\left([X = x] \cap [Y = y]\right) = 1.$$

1.2 Lois marginales

Définition 3 (Loi marginale)**.**

(1) La première loi marginale du couple (X,Y) est la loi de la variable aléatoire X.
(2) La seconde loi marginale du couple (X,Y) est la loi de la variable aléatoire Y.

✎ **Méthode** (Obtention des lois marginales à l'aide de la formule des probabilités totales)**.**
Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont on connait la loi conjointe.

- On obtient la loi de X grâce à la formule des probabilités totales avec le s.c.e $([Y=y])_{y\in Y(\Omega)}$.

$$P([X=x]) = \sum_{y\in Y(\Omega)} P([X=x]\cap[Y=y]) \quad \text{ou} \quad P([X=x]) = \sum_{y\in Y(\Omega)} P([Y=y])P_{[Y=y]}([X=x])$$

- On obtient la loi de Y grâce à la formule des probabilités totales avec le s.c.e $([X=x])_{x\in X(\Omega)}$.

$$P([Y=y]) = \sum_{x\in X(\Omega)} P([X=x]\cap[Y=y]) \quad \text{ou} \quad P([Y=y]) = \sum_{x\in X(\Omega)} P([X=x])P_{[X=x]}([Y=y])$$

Remarque 1. Si la loi du couple est résumée dans un tableau à double entrée, les lois marginales s'obtiennent en sommant les éléments de chaque ligne et de chaque colonne.

Exercice 2. Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On tire deux boules dans cette urne et on note X le numéro de la première boule et Y le numéro de la deuxième boule.

(1) Cas d'un tirage avec remise.
 (a) Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y).
 (b) Déterminer les lois marginales du couple (X,Y)
(2) Reprendre les questions précédentes dans le cas d'un tirage sans remise.

Exercice 3. On lance une pièce donnant pile avec probabilité $p\in]0;1[$ et face avec probabilité $q=1-p$. On note X le rang d'apparition du premier pile et Y le rang d'apparition du deuxième pile.

(1) Préciser $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ puis déterminer la loi du couple (X,Y).
(2) Déterminer les lois marginales du couple (X,Y) (sans calculs pour la loi de X).

1.3 Lois conditionnelles

Définition 4. *Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires discrètes.*

- *Soit $y\in Y(\Omega)$ fixé tel que $P([Y=y])\neq 0$. On appelle* ***loi conditionnelle de X sachant*** *$[Y=y]$ la donnée des valeurs*

$$P_{[Y=y]}([X=x]), \quad \forall x\in X(\Omega).$$

- *Soit $x\in X(\Omega)$ fixé tel que $P([Y=y])\neq 0$. On appelle* ***loi conditionnelle de Y sachant*** *$[X=x]$ la donnée des valeurs*

$$P_{[X=x]}([Y=y]), \quad \forall y\in Y(\Omega).$$

✎ **Méthode.** On peut obtenir une loi conditionnelle de différentes manières suivants les situations.

- Si on connait la loi du couple (donc les probabilités $P([X=x]\cap[Y=y])$), on utilise la formule des probabilités composées. Par exemple, la loi conditionnelle de X sachant $[Y=y]$ est donnée par :

$$P_{[Y=y]}([X=x]) = \frac{P([X=x]\cap[Y=y])}{P([Y=y])}, \quad \forall x\in X(\Omega).$$

- Si on ne connait pas la loi du couple, on peut souvent reconnaitre pour la loi conditionnelle une loi connue en utilisant l'information contenue dans l'évènement qui conditionne.

Exercice 4. On lance une pièce donnant pile avec probabilité $p\in]0;1[$. On note X le rang d'apparition du premier pile et si $X=n$, on note Y le nombre de faces obtenus lors de n lancers supplémentaires.

(1) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X=n]$.

(2) Préciser $Y(\Omega)$ puis montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(Y = k) = \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (pq)^n.$$

2 Indépendance de variables aléatoires discrètes

2.1 Cas de deux variables

Définition 5. *On dit que deux variables aléatoires discrètes X et Y sont **indépendantes** ssi :*

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P([X = x] \cap [Y = y]) = P([X = x]) \times P([Y = y])$$

Remarque 2. Pour montrer que deux variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver un contre-exemple à la relation précédente.
On cherche alors souvent des évènements $[X = x]$ et $[Y = y]$ de probabilité non nulle et tels que l'évènement $[X = x] \cap [Y = y]$ est impossible donc de probabilité nulle.

Exercice 5.

(1) Les variables aléatoires X et Y de l'Exercice 2 sont-elles indépendantes (dans chaque cas) ?
(2) Les variables aléatoires X et Y de l'Exercice 3 sont-elles indépendantes ?

2.2 Cas de n variables

Définition 6.

- *On dit que les variables aléatoires discrètes $X_1, \ldots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** ssi*

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad P([X_1 = x_1] \cap \cdots \cap [X_n = x_n]) = \prod_{k=1}^{n} P([X_k = x_k]).$$

- *On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes si pour tout $n \in \mathbb{N}$ les variables aléatoires $X_0, \cdots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.*

2.3 Lemme des coalitions

Proposition 2 (Lemme des coalitions)**.**

- Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendante et si f et g sont deux fonctions numériques définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

- Soient $X_1, ..., X_n$ n variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes et soit $p \in [\![2; n-1]\!]$. Alors toute variable aléatoire fonction des variables $X_1, \cdots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des variables $X_{p+1}, \cdots, X_n$.

Exemple.

- Si X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont 5 variables aléatoires discrètes discrètes mutuellement indépendantes alors les variables $X_1 - X_2 + 2X_4^2$ et $X_3 - X_5^2$ sont indépendantes.
- Si X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes, alors X et Y ne le sont pas non plus.

3 Fonctions de deux variables aléatoires discrètes : Loi de $Z = g(X, Y)$

Dans cette section, on étudie des variables aléatoires du type $Z = g(X, Y)$ où (X, Y) est un couple de variables aléatoires et g une fonction de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Déterminer la loi de $D = X - Y$ puis la loi de $P = XY$ où (X, Y) est le couple défini dans l'Exercice 2.

Exercice 7. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(q)$ deux variables de Bernoulli indépendantes. Déterminer la loi de XY.

Théorème 1.

- *L'ensemble des valeurs prises par $Z = g(X, Y)$ est donné par :*
$$Z(\Omega) = \{z = g(x, y) \mid x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)\}$$
- *La loi de $Z = g(X, Y)$ est donnée par :*
$$\forall z \in Z(\Omega), \quad P\left([Z = z]\right) = \sum_{(x,y) \mid g(x,y)=z} P\left([X = x] \cap [Y = y]\right),$$
la somme précédente portant sur l'ensemble des couples (x, y) vérifiant $g(x, y) = z$.

✎ **Méthode** (Loi d'une somme, d'une différence)**.**
On obtient la loi de la somme (ou de la différence) deux variables aléatoires discrètes X et Y par application de la formule des probabilités totales avec au choix le s.c.e associé à X ou à Y.

Par exemple, avec le s.c.e associé à X, la loi de $X + Y$ est donnée par : $\forall z \in (X + Y)(\Omega)$,
$$P\left(X + Y = z\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x] \cap [X + Y = z]) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ z - x \in Y(\Omega)}} P([X = x] \cap [Y = z - x]).$$

☞ Noter que la probabilité $P([X = x] \cap [Y = z - x])$ est nulle dès que $z - x$ n'appartient pas à $Y(\Omega)$, ce qui a pour conséquence de restreindre les indices de la somme.

Exercice 8. Soient X et Y deux variables indépendantes suivant toutes deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

(1) Déterminer, en utilisant un s.c.e associé à X, $P(X = Y)$.
(2) Montrer, en utilisant un s.c.e associé à X que pour tout $n \geq 2$: $P\left(X + Y = n\right) = (n - 1)p^2 q^{n-2}$.

Théorème 2 (Somme des lois classiques)**.**

- **Somme de lois de Bernoulli**. *Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p, alors*
$$\sum_{k=1}^{n} X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$
- **Stabilité des lois binomiales**. *Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ deux lois binomiales indépendantes. Alors,*
$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p).$$
- **Stabilité des lois de Poisson**. *Soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ deux lois de Poisson indépendantes. Alors,*
$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu).$$

Exercice 9. Soient $X_1, \ldots, X_k$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes. Déterminer la loi de $X_1 + \cdots + X_k$ lorsque $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$, $\ldots$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_k)$.

4 Calculs d'espérance

4.1 Espérance de $Z = g\left(X, Y\right)$ - Théorème de transfert

Si on a déjà calculé la loi de $Z = g\left(X, Y\right)$, on peut calculer son espérance avec la formule classique. Sinon, on peut utiliser le théorème suivant qui nécessite seulement de connaitre la loi du couple.

Théorème 3 (Théorème de transfert)**.** *Soit (X, Y) deux variables aléatoires discrètes. Alors, on a sous réserve de convergence absolue :*
$$E\left(Z\right) = E\left(g(X, Y)\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} g(x, y) P([X = x] \cap [Y = y]).$$

Remarque 3. Si $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont deux ensembles finis, il n'y a pas de problème de convergence (absolue), puisqu'il s'agit alors d'une somme (double) finie. Dans le cas où (au moins) un des deux ensembles est infini, le caractère licite de l'écriture de la somme ci-dessus est conditionné par la convergence absolue d'une série à double indice et présente donc un problème assez subtil. Les sujets des problèmes de concours faisant intervenir ce type de somme proposent donc un guidage étape par étape pour en justifier l'existence d'une telle somme.

Exercice 10. Soient $D = X - Y$ et $P = XY$ où (X, Y) les variables aléatoires définies dans l'Exercice 2.
(1) Déterminer l'espérance de $P = XY$ à l'aide du théorème de transfert.
(2) Déterminer l'espérance de $D = X - Y$ à l'aide de la loi trouvée dans l'Exercice 6.

4.2 Espérance d'une somme

Proposition 3 (Linéarité de l'espérance)**.**

- Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes admettant une espérance, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors :
$$E(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E(X_i).$$
- Lorsque les constante sont égales à 1, on obtient le cas particulier important :
$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i).$$

Exercice 11. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires suivant toute la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit $M = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. Déterminer l'espérance de M.

4.3 Espérance d'un produit

Théorème 4. *Soit (X, Y) deux variables aléatoires discrètes. Alors, on a*
$$E(XY) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xy P([X = x] \cap [Y = y]).$$

Théorème 5. *Si X et Y sont **indépendantes** et admettent une espérance, alors XY admet une espérance, et on a*
$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

☞ On peut utiliser le théorème précédent pour montrer que deux variables aléatoires discrètes ne sont pas indépendantes en vérifiant que $E(XY) \neq E(X)E(Y)$.

Exercice 12. Soient X_1, X_2, et X_3, indépendantes, suivant des lois de Bernoulli de paramètre p. Montrer que les variables aléatoires $Y_1 = X_1 X_2$ et $Y_2 = X_2 X_3$ ne sont pas indépendantes.

5 Variance et covariance

5.1 Covariance

Définition 7. *Soient (X, Y) deux variables aléatoires discrètes admettant des moments d'ordre 2.*
*La **covariance** de X et Y est définie par :*
$$\operatorname{cov}(X, Y) = E\Big((X - E(X))\,(Y - E(Y)) \Big).$$

Théorème 6 (Formule de Koenig-Huygens)**.** *Soient (X, Y) deux variables aléatoires discrètes admettant des moments d'ordre 2. Alors :*
$$\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$
En particulier, on a :
$$\operatorname{cov}(X, X) = V(X)$$

Exercice 13. Déterminer la covariance des variables X et Y de l'Exercice 2 dans chaque cas.

Proposition 4 (Propriétés de la covariance)**.**

- Symétrie : $\mathrm{cov}(X, Y) = \mathrm{cov}(Y, X)$.
- Linéarité à gauche : $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \mathrm{cov}(\lambda X_1 + \mu X_2\,,\, Y) = \lambda \mathrm{cov}(X_1\,,\, Y) + \mu \mathrm{cov}(X_2\,,\, Y)$.
- Linéarité à droite : $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \mathrm{cov}(X\,,\, \lambda Y_1 + \mu Y_2) = \lambda \mathrm{cov}(X\,,\, Y_1) + \mu \mathrm{cov}(X\,,\, Y_2)$.

Exercice 14. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que : $V(X + \lambda Y) = V(X) + 2\lambda \mathrm{cov}(X, Y) + \lambda^2 V(Y)$.

Proposition 5. Si X et Y sont indépendantes, alors : $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$. **La réciproque est fausse !**

5.2 Variance d'une somme

Théorème 7.

- *Si X et Y admettent une variance, alors $X + Y$ également, et :*
$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \cdot \mathrm{cov}(X, Y).$$
- *Si X et Y sont indépendantes, et admettent une variance, alors $X + Y$ aussi, et on a :*
$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$
- *Si les variables $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, et admettent une variance, alors la variable $X_1 + \dots + X_n$ admette une variance et on a :*
$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n).$$

Exercice 15. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toute la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit $M = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Déterminer la variance de M.

5.3 Coefficient de corrélation linéaire

Définition 8. *Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes admettant des variances non nulles. Le **coefficient de corrélation linéaire** de X et Y est : $\rho_{X,Y} = \dfrac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.*

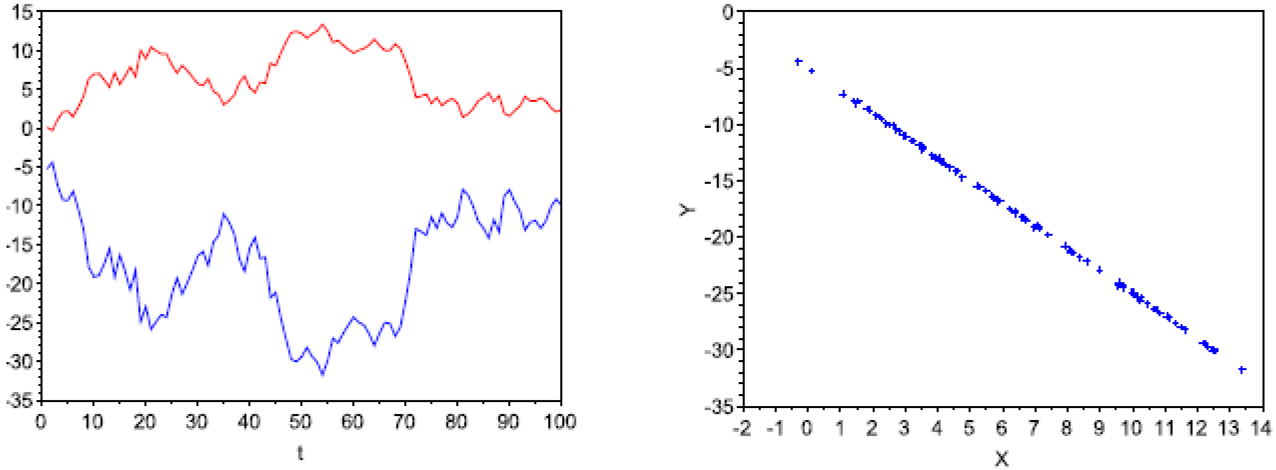
Théorème 8. *Le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est un réel compris entre -1 et 1 :*
$$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1.$$

Exercice 16. On a obtenu dans l'Exercice 14 l'égalité suivante
$$V(X + \lambda Y) = V(X) + 2\lambda \mathrm{cov}(X, Y) + \lambda^2 V(Y).$$
En étudiant le discriminant du polynôme en λ obtenu, montrer que : $|\rho_{X,Y}| \leq 1$.

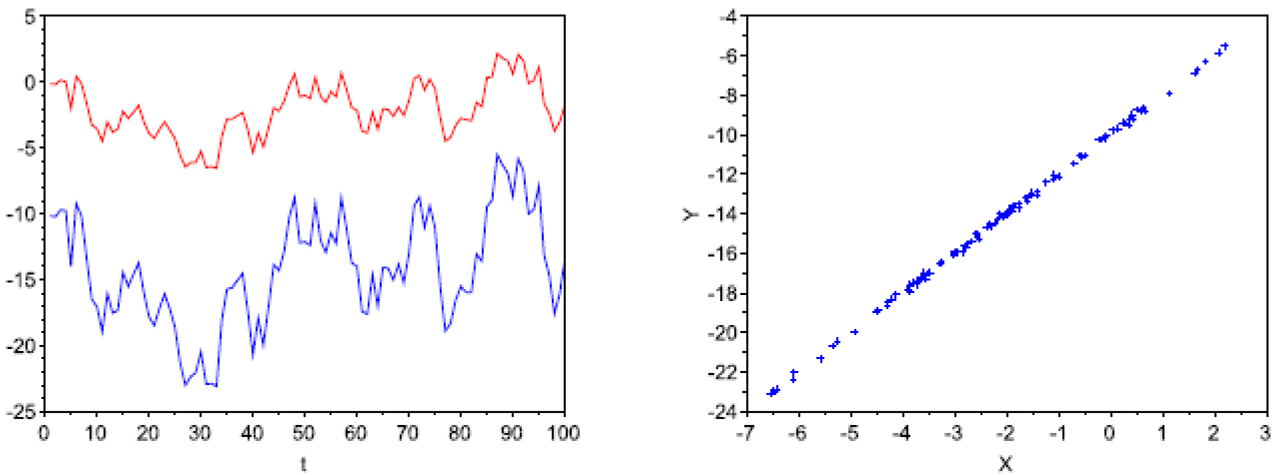
Proposition 6. Le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est un réel compris entre -1 et 1 :
$$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$$

- Il est égal à 1 dans le cas où l'une des variables est fonction affine croissante de l'autre variable.
- Il est égal à -1 dans le cas où l'une des variables est fonction affine décroissante de l'autre variable.
- Les valeurs intermédiaires renseignent sur le degré de dépendance linéaire entre les deux variables.
  - Plus le coefficient $\rho_{X,Y}$ est proche des valeurs extrêmes -1 et 1, plus la corrélation entre les variables est forte.
  - Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle (et donc le coefficient de corrélation linéaire est nul) sont dites non corrélées.
  - Une corrélation positive ($\rho_{X,Y} > 0$) indique que les variables X et Y varient dans le même sens.
  - Une corrélation négative ($\rho_{X,Y} < 0$) indique que les variables X et Y varient en sens inverse.

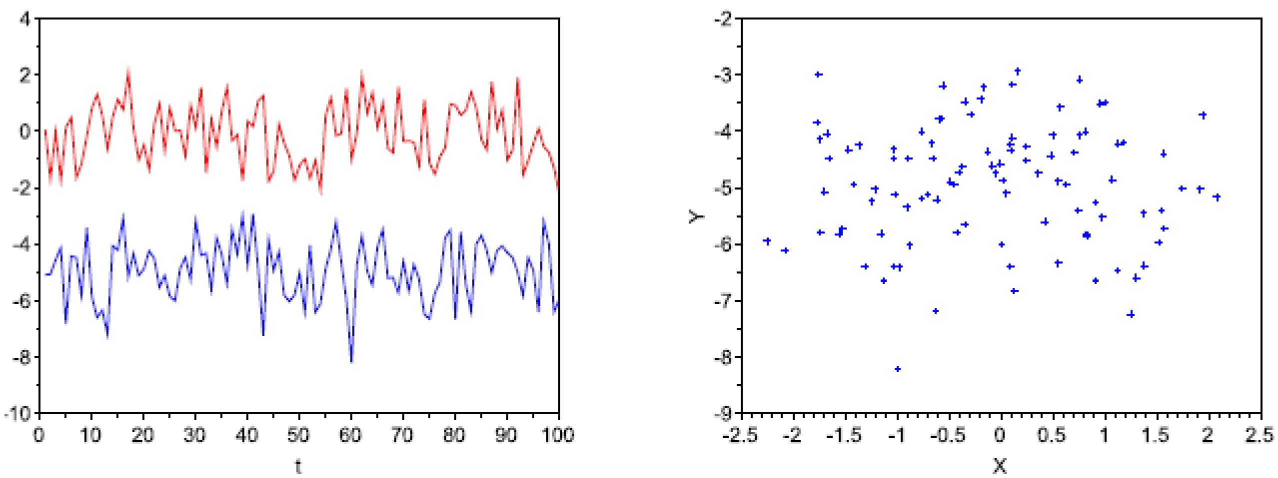
Exercice 17. Soit X une variable aléatoire discrète et $Y = 1 - 2X$. Déterminer la covariance de X et Y.



Corrélation négative



Corrélation positive



Corrélation nulle

6 Autres exercices

Exercice 18. Soit X une variable aléatoire (finie) dont la loi est donnée par le tableau ci-dessous

x	-2	-1	0	1	2
$P(X=x)$	$1/6$	$1/4$	$1/6$	$1/4$	$1/6$

et on définit ensuite $Y = X^2$.

(1) Déterminer la loi du couple (X, Y) puis la loi de Y.
(2) Déterminer $\text{cov}(X, Y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 19. On lance simultanément deux dés à trois faces (numérotées de 1 à 3) et on note X le maximum des numéros obtenus et Y le minimum des numéros obtenus.

(1) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
(2) Déterminer les lois marginales.
(3) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
(4) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[Y \geq 2]$.
(5) Déterminer la loi de la variable $Z = Y - X$ ainsi que son espérance.
(6) Déterminer la covariance de X et de Y.

Exercice 20. Soit $a \in \mathbb{R}$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$, de loi conjointe :

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a}{2^{i+1} j!}.$$

(1) Déterminer le réel a.
(2) Déterminer les lois marginales.
(3) X et Y sont-elle indépendantes ?

Exercice 21. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et 2 boules noires numérotées 1 et 2. On tire une à une, sans remise, toutes les boules de l'urne et on définit deux variables aléatoires X et Y correspondant respectivement au rang d'apparition de la première boule blanche et de la boule numérotée 1.

(1) Déterminer les lois de X et Y.
(2) Les variables X et Y sont-elles indépendantes? Calculer $\rho_{X,Y}$.

Exercice 22. Une urne U_1 contient n boules numérotées de 1 à n. Une urne U_2 contient des boules rouges en proportion p. On tire une boule au hasard dans U_1 et on note X la variable aléatoire correspondant au numéro de la boule obtenue. Si $X = k$, on tire k fois, avec remise, une boule dans l'urne U_2 et on appelle Y le nombre de boules rouges tirées.

(1) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
(2) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = k$, pour $k \in X(\Omega)$.
(3) Déterminer la loi du couple (X, Y).
(4) Déterminer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 23. Soient X et Y telles que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et telles que la loi conditionnelle de Y, sachant $X = k$ (où $k \in X(\Omega)$) est une loi binomiale de paramètre $n - k$ et p. Quelle est la loi de Y?

Exercice 24. Soient $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ que l'on suppose indépendantes. On définit $S = X_1 + X_2$ et $D = X_1 - X_2$. Calculer $\rho_{S,D}$. Les variables S et D sont-elles indépendantes?

Exercice 25. Un auto-stoppeur attend au péage d'une autoroute pendant une certaine période. On admet que le nombre de véhicules franchisant le péage pendant cette période est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. A chaque fois qu'un véhicule franchit le péage, il lance une pièce truquée qui donne pile avec la probabilité p. On pose $q = 1 - p$.
On note N, X et Y respectivement le nombre de lancers, le nombre de piles obtenus et le nombre de face obtenus.

(1) (a) Pour tout couple (i,j) d'entiers naturels, calculer la probabilité $P_{(N=j)}(X=i)$.
(b) En déduire la loi du couple (X,N).
(c) Montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre λp.
(2) Expliquer sans aucun calcul pourquoi Y suit une loi de Poisson de paramètre λq.
(3) Montrer que X et Y sont indépendantes.
(4) (a) Montrer que : $V(Y) = V(N) + V(X) - 2\text{cov}(N,X)$.
(b) En déduire $\text{cov}(N,X)$.
(c) Donner de même $\text{cov}(N,Y)$.

6.1 Extraits d'annales de concours

Exercice 26. (D'après **ECRICOME 2007**) Soucieux d'améliorer le flux de sa clientèle lors du passage en caisse, un gérant de magasin a réalisé les observations suivantes :

(1) L'étude du mode de paiement en fonction du montant des achats a permis d'établir les probabilités suivantes :

$$P[S=0\cap U=0]=0.4$$
$$P[S=0\cap U=1]=0.3$$
$$P[S=1\cap U=0]=0.2$$
$$P[S=1\cap U=1]=0.1$$

où S représente la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le montant des achats est inférieur ou égal à 50 euros, prenant la valeur 1 sinon, et U la variable aléatoire prenant la valeur 0 si la somme est réglée par carte bancaire, prenant la valeur 1 sinon.

(a) Déterminer les lois de S et U et vérifier que la probabilité que le client règle par carte bancaire est égale à $p = 3/5$.
(b) Calculer la covariance du couple (S,U). Les variables S et U sont-elles indé-pendantes ?
(c) Quelle est la probabilité que la somme réglée soit supérieure strictement à 50 euros sachant que le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire ?

(2) On suppose que les modes de règlement sont indépendants entre les individus.

Une caissière reçoit n clients dans sa journée ($n \geq 2$). On définit trois variables aléatoires C_n, L_1, L_2 par :

- C_n comptabilise le nombre de clients qui paient par carte bancaire.
- L_1(resp.L_2) est égale au rang du 1^{er} (resp.du $2^{ème}$) client utilisant la carte bancaire comme moyen de paiement, s'il y en a au moins un (resp.au moins deux) et à zéro sinon

(a) Reconnaître la loi de C_n, rappeler la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable aléatoire.
(b) Déterminer la loi de L_1 et vérifier que :

$$\sum_{k=0}^{n} P[L_1=k]=1.$$

(c) Déterminer la loi de L_2.

Exercice 27. (D'après **ESCP 1997**)

On effectue une suite d'expériences aléatoires consistant à jeter simultanément deux pièces de monnaie notées A et B. On suppose que ces expériences sont indépendantes et qu'à chaque expérience les résultats des deux pièces sont indépendants. On suppose que, lors d'une expérience, la probabilité que la pièce A donne pile est a, et que la probabilité que la pièce B donne pile est b. On considère la variable aléatoire X qui représente le nombre de piles obtenus avant que la pièce A donne face pour la première fois et la variable aléatoire Y qui représente le nombre de piles obtenus avant que la pièce B donne face pour la première fois.

(1) Déterminer les lois de X et Y.
(2) Montrer que la variable $Z = X+1$ est une loi géométrique puis en déduire l'espérance et la variance de X.
(3) Donner, pour tout entier naturel k, la valeur de $P(X \geq k)$.
(4) On s'intéresse au nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que l'une au moins des pièces donne face pour la première fois. Pour cela on note M la variable aléatoire définie par $M = \min(X, Y)$.
   (a) Calculer, pour tout entier naturel k, la probabilité $\mathbf{P}(M \geq k)$.
   (b) En déduire la loi de probabilité de M.
(5) Montrer que la probabilité que la pièce B ne donne pas face avant la pièce A vaut $\mathbf{P}(Y \geq X) = \dfrac{1-a}{1-ab}$.

Exercice 28. (D'après **EDHEC 2011**)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n, contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.

Pour tout i de $\{1, 2, ..., n\}$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

(1) (a) Pour tout i et tout k, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on note $U_{i,k}$ l'événement "l'urne numéro i est choisie à la $k^{\text{ème}}$ épreuve".
   Écrire l'événement $(X_i = 1)$ à l'aide de certains des événements $U_{i,k}$, puis montrer que :

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, \ P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

   (b) Justifier également que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on a :

$$P([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n.$$

   (c) Comparer $\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)$ et $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^2$ et en déduire que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, alors les variables X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

(2) On pose $Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_i$.
   (a) Déterminer l'espérance de Y_n, notée $E(Y_n)$.
   (b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{E(Y_n)}{n}$ et donner un équivalent de $E(Y_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

(3) Pour tout i de $\{1, 2, ..., n\}$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves.
   (a) Donner sans calcul la loi de N_i ainsi que la valeur de $E(N_i)$.
   (b) Que vaut le produit $N_i X_i$?
   (c) Les variables N_i et X_i sont-elles indépendantes ?

6.2 Sujet ESSEC II 2001

Partie I

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé et admettant des espérances $E(X)$ et $E(Y)$ et des variances $V(X)$ et $V(Y)$ et on suppose $V(X) > 0$ (on rappelle que $V(X) = 0$ si et seulement si, avec une probabilité égale à 1, X est constante). La covariance des deux variables aléatoires X et Y (que celles-ci soient discrètes ou à densité) est alors le nombre réel défini par:

$$\text{cov}(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))], \text{ ou encore } E(XY) - E(X)E(Y).$$

(1) **Covariance des variables aléatoires X et Y.**

(a) Exprimer $\text{cov}(\lambda X + Y, \lambda X + Y)$ en fonction de $V(\lambda X + Y)$ et en déduire la formule suivante pour tout nombre réel λ :

$$V(\lambda X + Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \text{cov}(X,Y) + V(Y).$$

(b) En déduire que $(\text{cov}(X,Y))^2 \leqslant V(X)V(Y)$.
A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité $((\text{cov}(X,Y))^2 = V(X)V(Y)$?

(2) **Coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y.**
On suppose dans cette question les variances $V(X)$ et $V(Y)$ de X et Y strictement positives.

(a) Exprimer le coefficient de corrélation linéaire ρ des variables aléatoires X et Y en fonction de $\text{cov}(X,Y)$ et des écarts-types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ des variables aléatoires X et Y et montrer que ρ appartient à $[-1, +1]$.
Préciser de plus à quelle condition nécessaire et suffisante ρ est égal à -1 ou $+1$.

(b) Donner la valeur de ρ lorsque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

(c) On suppose enfin que X suit une loi normale centrée réduite $N(0,1)$ et $Y = X^2$.
Préciser les espérances et les variances de X et Y ainsi que la covariance et le coefficient de corrélation de X et Y. Étudier alors la réciproque de la question **2.b)**.

Partie II

(1) **Calculs préliminaires**

(a) On considère deux nombres entiers naturels q et n tels que $n \geqslant q$. En raisonnant par récurrence sur n, établir la formule suivante :

$$\sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}$$

(b) En faisant $q = 1, 2, 3$, en déduire une expression factorisée des quatre sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k; \qquad \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \quad \textit{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2; \qquad \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2).$$

On considère dans toute la suite de cette partie un nombre entier $n \geqslant 2$ et une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n.
On extrait de cette urne successivement et sans remise 2 jetons et on désigne alors par :

- N_1 la variable aléatoire indiquant le numéro du premier jeton tiré
- N_2 la variable aléatoire indiquant le numéro du second jeton tiré.
- X la variable aléatoire indiquant le plus petit des numéros des 2 jetons tirés.
- Y la variable aléatoire indiquant le plus grand des numéros des 2 jetons tirés.

On note $E(N_1)$ et $V(N_1)$, $E(N_2)$ et $V(N_2)$, $E(X)$ et $V(X)$, $E(Y)$ et $V(Y)$ les espérances et variances des quatre variables aléatoires N_1, N_2, X, Y.

(2) **Lois conjointe et marginales des variables aléatoires N_1 et N_2.**

(a) Déterminer les probabilités $P(N_1 = i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $P(N_2 = j/N_1 = i)$ pour $1 \leqslant j \leqslant n, j \neq i$.
En déduire $P(N_2 = j)$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$, puis comparer les lois de N_1 et N_2.
(b) Calculer les espérances $E(N_1)$ et $E(N_2)$, les variances $V(N_1)$ et $V(N_2)$.
(c) Déterminer les probabilités $P(N_1 = i \cap N_2 = j)$pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$ en distinguant les deux cas $i = j$ et $i \neq j$ et en déduire que :

$$E(N_1N_2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}.$$

En déduire la covariance et le coefficient de corrélation linéaire de N_1 et N_2.
(d) Exprimer enfin sous forme factorisée la variance $V(N_1 + N_2)$.

(3) **Lois conjointe, marginales et conditionnelles des variables** aléatoires X et Y.

(a) Montrer que les probabilités $P(X = i \cap Y = j)$ sont égales à $\dfrac{2}{n(n-1)}$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$.
Que valent-elles sinon ?
(b) En déduire les probabilités $P(Y = j)$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$ et $P(X = i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n - 1$.
(On vérifiera que les formules donnant $P(Y = j)$ et $P(X = i)$ restent valables si $j = 1$ ou $i = n$).
(c) Déterminer les probabilités $P_{Y=j}(X = i)$ et $P_{X=i}(Y = j)$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, puis reconnaître la loi de X conditionnée par $Y = j$ et la loi de Y conditionnée par $X = i$.
(d) Comparer les lois des variables aléatoires $n+1-X$ et Y, autrement dit les deux probabilités $P(n + 1 - X = j)$ et $P(Y = j)$ pour $2 \leqslant j \leqslant n$.
En déduire que $E(n+1-X) = E(Y)$ et $V(n+1-X) = V(Y)$, puis en déduire les expressions de $E(X)$ en fonction de $E(Y)$ et de $V(X)$ en fonction de $V(Y)$.

(4) **Espérances et variances des variables aléatoires X et Y.**

(a) Exprimer les espérances $E(Y)$ et $E(X)$ en fonction de n.
(b) Exprimer sous forme factorisée $E[(Y(Y-2)]$, puis $E(Y^2), V(Y)$ et $V(X)$ en fonction de n.

(5) **Covariance et coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y.**

(a) Vérifier que $X + Y = N_1 + N_2$, puis en déduire sous forme factorisée la variance de $X + Y$ et la covariance de X et Y.
(b) En déduire le coefficient de corrélation de X et Y.
On remarquera que ce coefficient de corrélation linéaire de X et Y est indépendant de n.