ECE 2 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Préparation à l'épreuve orale

Concours d'entrée HEC

Extraits du rapport du jury, session 2016

Le sujet proposé aux candidats, quelle que soit l'option dont ils sont issus, comprend deux parties:

- un **exercice principal** préparé pendant 30 minutes et portant sur l'une des trois parties suivantes du programme: *algèbre*, *probabilités* et *analyse*. De plus, une question de cours en rapport avec le thème de l'exercice fait partie de l'exercice principal ;
- un **exercice sans préparation** portant sur une partie différente de celle de l'exercice principal, permettant de tester en temps réel les qualités de réactivité des candidats.

Rappelons que **dans tous les cas, chaque candidat est interrogé en probabilités**, soit au titre de l'exercice principal (20 à 25 minutes), soit à celui de l'exercice sans préparation (5 à 10 minutes).

[...] il n'est pas nécessaire de « tout faire » pour obtenir une excellente note, voire un « 20 » ! En effet, la réactivité aux informations fournies par le jury, la vivacité d'esprit et la maîtrise du cours entrent dans une large part dans l'appréciation de la prestation des candidats.
L'exercice sans préparation posé en fin d'interrogation joue son rôle d'amortisseur ou d'amplificateur de la note de l'exercice principal.

Les interrogateurs ont observé chez les candidats une attitude qui tend à s'accélérer ces dernières années et qui se manifeste par une répétition de locutions à la mode (« du coup ») et, plus grave, l'affirmation « j'ai plusieurs pistes » pour résoudre une question donnée mais sans préciser la direction à suivre et en quoi consistent ces fameuses pistes !

Conseils

Devant le jury, il est important de **s'exprimer clairement et de manière audible**, de garder une posture droite et d'essayer de **gommer autant que possible tout tic de langage** ou gestuel.

Il est également capital de concevoir cette épreuve comme **interactive**, c'est-à-dire

- Pendant l'exposé de l'exercice préparé, de bien vous adresser au jury, en regardant un minimum ses notes.
- Établir un juste équilibre entre écriture au tableau et justifications orales.
- Être réactif à ses interruptions et à ses indications.

Lors de la préparation, il faut commencer par lire le sujet en entier, de manière à avoir une idée de sa logique, et afin d'identifier les questions que vous êtes capables de traiter.

L'exercice préparé commence systématiquement par une *question de cours.* Il est capital de la traiter parfaitement dans un laps de temps très court.

Il faut impérativement détailler chaque question (même les plus simples) sur vos notes, l'improvisation étant un jeu très risqué à ce niveau.

Écrivez avec soin au tableau. Avant le début de la présentation, tracer les séparations au feutre pour ne plus avoir à y penser. **Ne pas effacer le tableau**, sauf éventuellement entre les deux exercices.

Exemples de sujets

Exemple 1

Exercice principal

(1) *Question de cours* : Définition et représentation graphique de la fonction partie entière.

On note E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par les quatre fonctions f_0, f_1, f_2 et f_3 définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = e^x, \quad f_3(x) = xe^x.$$

(2) On note $\mathcal{B} = \{f_0, f_1, f_2, f_3\}$
 (a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de F.
 (b) Montrer que toutes les fonctions de F sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

(3) Soit Φ l'application définie par: pour toute $f \in F$, $\Phi(f) = f'$, où f' est la dérivée de f.
 (a) Justifier que Φ est un endomorphisme de E et écrire la matrice M de Φ dans la base $\mathcal{B}$.
 (b) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable?
 (c) Montrer que f_3 appartient à $\mathrm{Im}(\Phi)$ et résoudre l'équation $\Phi(f) = f_3$.

(4) On note G l'ensemble des fonctions $g \in E$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x+1) - g(x) = 0.$$

 (a) Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et trouver $F \cap G$.
 (b) Trouver un élément de G qui n'appartienne pas à F.

(5) Trouver toutes les fonctions f de F vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x+1) - f(x) = (e-1)f'(x).$$

Exercice sans préparation

Soit p un réel de $]0;1[$ et $q = 1-p$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de même loi de Bernoulli telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X_k = 1) = p, \quad \text{et} \quad P(X_k = 0) = q.$$

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on définit pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la variable aléatoire $Y_k = X_k + X_{k+1}$.

(1) (a) Calculer pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathrm{Cov}(Y_k, Y_{k+1})$.
 (b) Montrer que

$$0 < \mathrm{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) < \frac{1}{4}.$$

(2) Calculer, pour tout couple (k,l) tel que $1 \leq k < l \leq n$, $\mathrm{Cov}(Y_k, Y_l)$.

(3) On note ε un réel strictement positif fixé. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k - 2p\right| > \varepsilon\right) = 0.$$

Exemple 2

Exercice principal

(1) *Question de cours* : Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Lois marginales. Lois conditionnelles.

Soit c un réel strictement positif et soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \qquad P([X=i] \cap [Y=j]) = c\frac{i+j}{i!j!}.$$

(2) (a) Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a

$$P(X=i) = c\frac{i+1}{i!}$$

En déduire la valeur de c.

(b) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer. c) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

(3) (a) Déterminer la loi de $X+Y-1$.
(b) En déduire la variance de $X+Y$.
(c) Calculer la covariance de X et de $X+5Y$. Les variables aléatoires X et $X+5Y$ sont-elles indépendantes ?

(4) On pose : $Z = \dfrac{1}{X+1}$.
(a) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.
(b) Déterminer pour $i \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X=i]$.
(c) Pour $A \in \mathcal{A}$, on pose

$$g_A(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP_A(Y=k)$$

Établir l'existence d'une fonction affine f telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$g_{[X=X(\omega)]}(Y) = f(Z(\omega)).$$

Exercice sans préparation

(1) La somme de deux matrices diagonalisables est-elle diagonalisable ?
(2) La somme de deux matrices inversibles est-elle inversible ?
(3) Montrer que toute matrice carrée est la somme de deux matrices inversibles.