ORAL HEC 2016

MATHEMATIQUES

Options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L

Les épreuves orales de mathématiques concernent les candidats admissibles dans les options scientifique, économique, technologique et littéraire B/L. Elles ont mobilisé 4 à 5 jurys par demi-journée afin de pouvoir interroger l'ensemble des 651 candidats admissibles présents.

1. Procédure d'interrogation

Le mode d'interrogation reste identique à celui des concours précédents : le sujet proposé aux candidats, quelle que soit l'option dont ils sont issus, comprend deux parties:

- un *exercice principal* préparé pendant 30 minutes et portant sur l'une des trois parties suivantes du programme: *algèbre, probabilités et analyse*. De plus, une *question de cours* en rapport avec le thème de l'exercice fait partie de l'exercice principal ;
- un *exercice sans préparation* portant sur une partie différente de celle de l'exercice principal, permettant de tester en temps réel les qualités de réactivité des candidats.

Rappelons que dans tous les cas, chaque candidat est interrogé en probabilités, soit au titre de l'exercice principal (20 à 25 minutes), soit à celui de l'exercice sans préparation (5 à 10 minutes).

2. Commentaires

A l'issue des épreuves orales de mathématiques, on peut tirer un certain nombre d'enseignements.

Rappelons tout d'abord que les exercices (avec préparation et sans préparation) proposés aux candidats comportent un certain nombre de questions et il est clair qu'un candidat qui résout entièrement son sujet avec aisance et une argumentation solide se verra attribuer la note maximale de 20.
Mais, il n'est pas nécessaire de « tout faire » pour obtenir une excellente note, voire un « 20 » ! En effet, la réactivité aux informations fournies par le jury, la vivacité d'esprit et la maîtrise du cours entrent dans une large part dans l'appréciation de la prestation des candidats.
L'exercice sans préparation posé en fin d'interrogation joue son rôle d'amortisseur ou d'amplificateur de la note de l'exercice principal.

Bien que le « filtre » des épreuves écrites ne soit pas parfait, l'oral élimine les raisonnements approximatifs ou les récitations de recettes non maîtrisées n'ayant qu'un rapport lointain avec la question à résoudre.

La connaissance du cours a certes tendance à s'améliorer, mais ce phénomène est beaucoup trop lent à se mettre en place.

Peu ou prou, les remarques négatives consignées dans les comptes rendus des épreuves écrites ou orales des concours précédents restent largement d'actualité : hormis quelques très (trop ?) rares candidats brillants produisant de remarquables exposés, la majorité des candidats manquent de maturité et de recul et se raccrochent à des exercices étudiés en cours.
C'est ainsi que souvent, les candidats n'écoutent pas le jury dont les remarques contiennent une indication à peine voilée sur la marche à suivre ou l'erreur à rectifier !
A cet égard, les interrogateurs ont observé chez les candidats une attitude qui tend à s'accélérer ces dernières années et qui se manifeste par une répétition de locutions à la mode (« du coup ») et, plus grave, l'affirmation « j'ai plusieurs pistes » pour résoudre une question donnée mais sans préciser la direction à suivre et en quoi consistent ces fameuses pistes !

Introduit au concours 2015 pour les options scientifique et économique, le langage Scilab était pour la première fois cette année, au programme de l'option technologique.
Le jury a constaté que dans l'ensemble, les candidats étaient bien mieux préparés que l'an passé pour résoudre les questions relatives à ce langage.

Enfin, les illustrations (représentations) graphiques de certains résultats de cours sont quasiment toujours absentes : ainsi par exemple, la visualisation dans l'espace à trois dimensions d'une projection orthogonale sur un plan parallèlement à une droite (théorème de Pythagore) pose des problèmes insurmontables à nombre de candidats.

3. Résultats statistiques

Par option, les notes moyennes obtenues sont les suivantes:

- *option scientifique* (405 candidats): 10,82 (11,22 en 2015);
- *option économique* (196 candidats): 10,63 (9,11 en 2015);
- *option technologique* (35 candidats): 10,29 (12,09 en 2015);
- *option littéraire B/L* (15 candidats): 12,00 (10,12 en 2015).

Dans **l'option scientifique**, le niveau général est moins bon que celui du concours 2015 : les notes s'étendent entre 1 et 20 et l'écart-type de 3,56 permet de classer correctement les admissibles.
Cette année encore, les sujets d'analyse (suites, fonctions réelles, calcul différentiel et intégral) posent d'importants problèmes à une majorité de candidats : les notions les plus élémentaires - étude de fonctions, représentations graphiques, convexité et concavité, théorèmes classiques – ne sont pas du tout maîtrisées.

Dans **l'option économique**, le jury a observé cette année, un peu moins de mauvaises prestations de la part des candidats: les notes s'étendent entre 2 et 20 et l'écart-type de 4,25, relativement élevé a permis de discriminer correctement les candidats de cette option.

On note cependant de nombreuses erreurs dans des calculs élémentaires (dérivations, primitives de fonctions simples), ou encore des résultats non simplifiés à leur plus simple expression.

On assiste dans **l'option technologique** à une augmentation très sensible du nombre d'admissibles par rapport au concours 2015 qui passe de 23 à 35.
La note moyenne est en baisse par rapport à 2015 (10,29 contre 12,09) et la baisse de l'écart-type qui passe de 3,92 à 3,25 témoigne d'une assez forte homogénéité du niveau mathématique des candidats de cette option. A cet égard, l'étendue des notes est de 12 ponts seulement, les notes minimale et maximale étant respectivement de 5 et 17.

Enfin, dans **l'option littéraire B/L**, la note moyenne des 15 candidats présents est de 12 en nette augmentation par rapport à 2015 (10,12 en 2015). Bien que moins élevé qu'en 2015, l'écart-type de 4,55 montre une bonne dispersion des notes attribuées et permet un classement convenable des candidats. Les notes s'étendent entre 5 et 20.

HEC
PARIS

ORAL HEC 2016

MATHÉMATIQUES

EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

Option scientifique

Exercice principal

1. Question de cours

   Indiquer pour quels nombres réels x les séries $\sum_{n\geq 1} x^n$ et $\sum_{n\geq 1} n\,x^{n-1}$ sont convergentes et préciser alors leurs sommes respectives.

Soit a un nombre réel strictement positif.

On note $M = \begin{pmatrix} 1+a & -1 & 1 \\ 1+2a & -a-1 & 1 \\ 2a & -2a & a \end{pmatrix}$, u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est M, et id l'endomorphisme identité de $\mathbf{R}^3$.

2. Montrer que $-a$ est une valeur propre de u et trouver la dimension du sous-espace propre $E_{-a}(u)$ associé.

3. On pose : $f = (u - a\,\mathrm{id})^2$ (composé de l'endomorphisme $u - a\,\mathrm{id}$ avec lui-même).

   a) Calculer $f(e_1 + e_2 + e_3)$.
   b) Montrer que $E_{-a}(u)$ et $\operatorname{Ker} f$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbf{R}^3$.
   c) En déduire un polynôme annulateur de u de degré 3.
   d) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

4. On note p le projecteur de noyau $E_{-a}(u)$ et d'image $\operatorname{Ker} f$. On pose : $h = u - a\,p + a(\mathrm{id} - p)$.

   a) Montrer que h^2 est l'endomorphisme nul.
   b) Établir pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'égalité : $u^n = a^n p + (-a)^n(\mathrm{id} - p) + n\,a^{n-1}h$.

5. On suppose dans cette question que $0 < a < 1$.
   Montrer que l'endomorphisme $\mathrm{id} - u$ est bijectif et que sa réciproque $(\mathrm{id} - u)^{-1}$ appartient à l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}, p, h)$.

Exercice sans préparation

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi uniforme sur un segment $[a, b]$ $(1 \leq a < b)$.

Justifier la double inégalité :

$$E\Big(X + \frac{1}{X}\Big) > a + \frac{1}{a} \geq 2\ .$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Cours

2. La matrice $M + aI_3 = \begin{pmatrix} 1+2a & -1 & 1 \\ 1+2a & -1 & 1 \\ 2a & -2a & 2a \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, puisque ses deux premières lignes sont identiques (ou ses deux dernières colonnes opposées), et son rang est égal à deux puisque, de plus, ses deux dernières lignes ne sont pas proportionnelles (on demandera éventuellement de le justifier).
Il en résulte que $-a$ est une valeur propre de u et, par le théorème du rang, que la dimension du sous-espace propre $E_{-a}(u)$ est égale à 1.
Remarque : $E_{-a}(u) = \mathrm{Vect}\{e_2 + e_3\}$

3. On pose $f = (u - a\,\mathrm{id})^2$ (composé de l'endomorphisme $u - a\,\mathrm{id}$ avec lui-même).

   a) $M - aI_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1+2a & -1-2a & 1 \\ 2a & -2a & 0 \end{pmatrix}$,

   d'où $(u - a\,\mathrm{id})(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + e_2$, puis $f(e_1 + e_2 + e_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

   Remarque : $(M - aI_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4a^2 & 4a^2 & 0 \\ 4a^2 & -4a^2 & 0 \end{pmatrix}$.

   b) Comme $e_2 + e_3$ est un vecteur de $E_{-a}(u)$, $e_1 + e_2$ et $e_1 + e_2 + e_3$ des vecteurs de $\mathrm{Ker}(f)$ et que ces trois vecteurs constituent une base de $\mathbb{R}^3$, $E_{-a}(u)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

   c) On en déduit que $(X - a)^2(X + a)$ est un polynôme annulateur de u, puisque l'endomorphisme $(u - a\mathrm{id})^2(u + a\mathrm{id})$ s'annule sur chacun des deux noyaux.

   d) On peut affirmer que l'endomorphisme u n'est pas diagonalisable, puisqu'on sait désormais que a et $-a$ sont ses seules valeurs propres et que la somme des dimensions des sous-espaces propres qui leur sont associés n'est pas égale à 3 mais à 2 (comme celui de $M + aI_3$, le rang de $M - aI_3$ est égal à deux).

4. On note p le projecteur de noyau $E_{-a}(u)$ et d'image $\mathrm{Ker}(f)$ et $h = u - ap + a(\mathrm{id} - p)$.

   a) On peut utiliser le polynôme annulateur de u trouvé précédemment, pour rester en pays géométrique, mais il est plus simple de raisonner matriciellement, à l'aide d'une base bien choisie. Ainsi, dans la base $(e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_2 + e_3)$,
   la matrice de u est $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}$ donc celle de h $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dont le carré est la matrice nulle.
   Il en résulte que h^2 est l'endomorphisme nul.

   b) Matriciellement aussi, on obtient la formule

$$u^n = a^n p + (-a)^n(\mathrm{id} - p) + na^{n-1}h$$

   en appliquant la formule du binôme à l'ordre n à la somme des deux matrices $\mathrm{Diag}(a, a, -a)$ et H', qui commutent.

5. On suppose désormais que a est strictement inférieur à 1.

   L'endomorphisme $\mathrm{id} - u$ est bijectif puisque 1 n'est pas valeur propre de u (car $0 < a < 1$).

   On obtient
$$(\mathrm{id} - u)^{-1} = \frac{1}{1-a}p + \frac{1}{1+a}(\mathrm{id} - p) + \frac{1}{(1-a)^2}h \ ,$$
   par passage à la limite (à justifier) à partir de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k = (\mathrm{id} - u)^{-1}(\mathrm{id} - u^{n+1})$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

L'étude de la fonction $h : x \longmapsto x + \dfrac{1}{x}$ sur $[1, +\infty[$ montre qu'elle un minimum au point 1, qui est égal à 2.
Il en résulte que $a + \dfrac{1}{a}$ est supérieur ou égal à 2 pour tout $a \geq 1$ (et même pour tout $a > 0$).
Comme $P([X \geq a]) = 1$, on a $E\Big(X + \dfrac{1}{X}\Big) \geq a + \dfrac{1}{a}$, et comme de plus $P([X > a]) > 0$, l'inégalité est stricte.

EXERCICE PRINCIPAL

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle et soit f un endomorphisme de E.

1. Question de cours

   Rappeler la définition d'un sous-espace stable par f.

2. Exemple

   Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) Calculer M^2 et identifier l'endomorphisme g.

   b) Démontrer qu'il existe une infinité de plans vectoriels stables par g.

On dit qu'un sous-espace vectoriel F est presque stable par f si $\dim(F) \geq 1$ et s'il existe un sous-espace vectoriel F' de F tel que

$$\dim(F') = \dim(F) - 1 \quad \text{et} \quad f(F') \subset F \tag{*}$$

3. a) Montrer qu'il existe toujours un sous-espace vectoriel de E presque stable par f et qu'il y en a une infinité si $\dim(E) \geq 2$.

   b) Soit F un sous-espace vectoriel de E presque stable par f mais qui n'est pas stable par f. Montrer qu'il existe un unique sous-espace F' qui satisfait (*).

4. Exemple (suite)

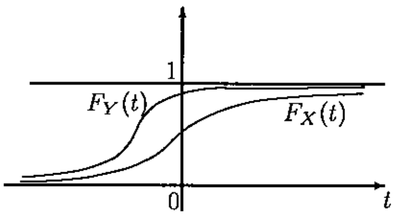
   a) Montrer que tous les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont presque stables par g.

   b) Quels sont les plans vectoriels F presque stables par g pour lesquels le sous-espace F' qui satisfait (*) n'est pas unique ?

5. Montrer qu'un sous-espace vectoriel F de E est presque stable par f si et seulement si la dimension de $F + f(F)$ est égale à $\dim(F)$ ou $\dim(F) + 1$. On pourra considérer pour une des implications l'espace vectoriel $G = f^{-1}(F) \cap F$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION

La figure ci-dessous est la représentation graphique de la fonction de répartition de deux variables aléatoires X et Y. Quelle est la variable dont l'espérance est la plus grande ? Justifier.



Corrigé de l'exercice principal

1. Cours.

2. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) $M^2 = M$ et g est le projecteur d'image $\text{Vect}\{e_1 - e_2, e_3\}$ et de noyau $\text{Vect}\{e_1 + e_2\}$.

   b) Tout plan de la forme $\text{Vect}\{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, e_3\}$ (avec $(\alpha_1, \alpha_2) \neq (0, 0)$) est stable par g.

3. a) L'espace E et toute droite de E sont presque stables.

   b) En supposant qu'il existe aussi F'' vérifiant (*), on a $f(F' + F'') \subset F$ et donc $F' + F'' = F' = F''$. Avec les dimensions,

$$\dim(F' + F'') = \dim(F) - 1 = \dim(F') + \dim(F'') - \dim(F' \cap F"")$$

   soit $\dim(F' \cap F) = \dim(F')$ et $F' = F''$.

4. Exemple (suite)

   a) Pour tout plan vectoriel F de $\mathbb{R}^3$, l'intersection de F avec l'image de g est une droite stable par g.

   b) Réponse : les plans vectoriels engendrés par deux vecteurs propres de g.

   L'image de g contient une infinité de droites stables. Quant aux plans engendrés par $e_1 + e_3$ et un vecteur non nul de l'image de g, ils contiennent deux droites stables.

   Les plans engendrés par un vecteur non nul de l'image et un vecteur non nul qui n'est pas vecteur propre de g ne sont pas stables et vérifient donc la propriété d'unicité.

5. On remarque tout d'abord qu'on a $\dim(F + f(F)) \geq \dim(F)$ Pour le sens direct, soit D une droite de F telle que D soit supplémentaire de F' dans F. On a alors

$$F + f(F) = F + f(F') + f(D) = F + f(F') + f(D) \subset F + f(D)$$

   et donc $\dim(F + f(F)) \leq \dim(F) + 1$

   Réciproquement, si $\dim(F + f(F)) = \dim(F)$, alors $f(F) \subset F$ et F est stable par f. On suppose donc que $\dim(F + f(F)) = \dim(F) + 1$. On note alors H un supplémentaire de G dans F. La restriction de f à G est injective car G contient $f^{-1}(\{0\}) \cap F$, noyau de la restriction de f à F. De plus $f(H)$ est en somme directe avec F car H est en somme directe avec $f^{-1}(F)$. Il s'ensuit que $F + f(F) = F \oplus f(H)$ et donc $\dim(H) = 1$. $F' = G$ convient donc et F est presque stable.

S 175

Corrigé de l'exercice sans préparation

La fonction de partition de F_X étant inférieure à F_Y on montre aisément que les réciproques de ces fonctions sont ordonnées en sens inverse.
Ainsi $E(F_X^{(-1)}(U)) > E(F_Y^{(-1)}(U))$ et donc $E(X) > E(Y)$.

Remarque : l'existence des deux espérances n'est pas assurée.

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours

   Énoncer le théorème du rang.

On note E l'espace vectoriel complexe formé des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes complexes.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $N \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la suite $u^{(k)}$ par :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n^{(k)} = n^k \alpha^n}$$

(en vertu de la convention $0^0 = 1$, la suite $u^{(0)}$ est la suite géométrique $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$) .

2. On note E_N le sous-espace vectoriel de E engendré par $u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(N)}$ et id l'endomorphisme identité de E_N.

   Montrer que la dimension de E_N est égale à $N + 1$.

3. Soit D l'endomorphisme de E défini par : $\forall u \in E,\ D(u) = v \Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1}$.

   a) Pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, calculer $D(u^{(k)})$. En déduire que E_N est stable par D.

   b) Montrer que l'endomorphisme D_N de E_N induit par D est bijectif.

   c) Plus généralement, montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, l'endomorphisme $P(D_N)$ est bijectif si et seulement si α n'est pas racine de P.

4. *On admet que pour tout* $r \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Ker}(D_N - \alpha\, Id_{E_N})^r \subset E_{r-1}$.

   a) Soit $r \in [\![1, N]\!]$.
   Justifier les égalités $\mathrm{Im}(D_N - \alpha\, Id_{E_N})^r = E_{N-r}$ et $\mathrm{Ker}(D_N - \alpha\, Id_{E_N})^r = E_{r-1}$, où Id_{E_N} désigne l'endomorphisme identité de E_N.

   b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et α une racine de P dont l'ordre de multiplicité, noté r_0, est supposé inférieur ou égal à N.
   Montrer que $\mathrm{Im}(P(D_N)) = E_{N-r_0}$ et $\mathrm{Ker}(P(D_N)) = E_{r_0-1}$.

5. Trouver N et une suite $u \in E_N$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} - 2\alpha\, u_{n+2} + \alpha^2\, u_{n+1} = \alpha^n .$$

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi uniforme $\mathcal{U}[0,1]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$Y_n = \Big(\prod_{i=1}^{n} X_i\Big)^{1/n}.$$

1. Expliquer pourquoi la figure ci-dessous, obtenue à partir du code *Scilab* suivant, suggère la convergence en probabilité de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

```
x=linspace(0.2,0.8,20);
n=[50 200 800];
for i=1:3
N=1000;
LY=sum(log(rand(N,n(i))),"c");// sommation des colonnes
C=exp(LY/n(i));
subplot(1,3,i);// place trois graphiques côte à côte
histplot(x,C);
end
```

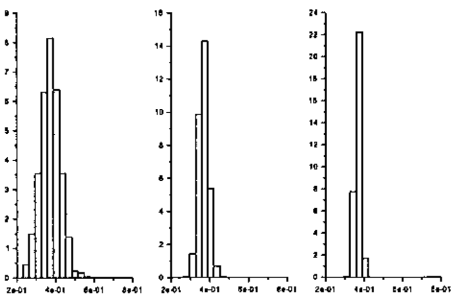


FIGURE 1 – *Histogrammes*

2. Justifier la convergence en probabilité de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Cours.

2. $E_N = \text{Vect}\{u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(N)}\}$.

Pour tout $\lambda_0, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ tels que $\lambda_0 u^{(0)} + \dots + \lambda_N u^{(N)} = 0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lambda_0 + \lambda_1 n + \dots + \lambda_N n^N = 0.$$

Le polynôme complexe $\lambda_0 + \dots + \lambda_N X^N$ a donc une infinité de racines, donc il est nul *i.e.* $\lambda_0 = \dots = \lambda_N = 0$.

Donc la famille $u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(N)}$ est libre, donc c'est une base de E_N ; donc $\dim E_N = N + 1$.

3.a) Pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, par la formule du binôme, on a :

$$D(u^{(k)}) = \alpha \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u^{(j)} \in E_N.$$

b) D'après la question précédente, la matrice M de D dans la base $u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(N)}$ est triangulaire supérieure avec α sur la toute la diagonale ; comme $\alpha \neq 0$, elle est inversible.

c) L'endomorphisme $P(D)$ est bijectif si et seulement si $P(\alpha) \neq 0$, car la matrice $P(M)$ de $P(D)$ est triangulaire supérieure avec $P(\alpha)$ sur la diagonale.

4.a) D'après le calcul de la question 3, pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, on a :

$$(D - \alpha Id_E)(u^{(k)}) = \alpha \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} u^{(j)} \in E_{k-1}.$$

Donc $(D - \alpha Id_E)(E_k) \subset E_{k-1}$, formule qui reste vraie pour $k = 0$ à condition de poser $E_{-1} = \{0_E\}$. Par récurrence on en déduit alors que, pour tout $r \in [\![1, k+1]\!]$, on a :

$$(D - \alpha Id_E)^r(E_k) \subset E_{k-r} .$$

Soit $r \in [\![1, N]\!]$.

En appliquant le résultat précédent à $k = N$, on obtient l'inclusion $\text{Im}(D_N - \alpha Id_{E_N})^r \subset E_{N-r}$.

En l'appliquant à $k = r - 1$, on obtient $E_{r-1} \subset \ker(D_N - \alpha Id_{E_N})^r$, puisque $(D - \alpha Id_E)^r(E_{r-1})$ est inclus dans $E_{-1} = \{0_E\}$.

D'après l'inclusion admise et le théorème du rang, les deux inclusions obtenues sont des égalités.

b) On a : $P = (X - \alpha)^{r_0} Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$; donc $Q(D_N)$ est un isomorphisme (voir 3.b.) qui envoie chaque E_k dans lui-même (se déduit du 3.). Or $P(D_N) = (D_N - \alpha Id_{E_N})^{r_0} \circ Q(D_N)$, donc :

$$\text{Im} P(D_N) = \text{Im}(D_N - \alpha Id_{E_N})^{r_0} = E_{N-r_0}.$$

De $P(D_N) = Q(D_N) \circ (D_N - \alpha Id_{E_N})^{r_0}$ on déduit $\ker P(D_N) = \ker(D_N - \alpha Id_{E_N})^{r_0} = E_{r_0 - 1}$.

5. La relation s'écrit : $P(D) = u^{(0)}$ avec $P = X^3 - 2\alpha X^2 + \alpha^2 X = X(X-\alpha)^2$. Comme α est racine d'ordre $r_0 = 2$ de P et $u^{(0)} \in E_0$, d'après la question précédente il existe une solution dans E_N avec $N = 2$.

La question 3 donne :

$$M = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; M - \alpha I = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (M - \alpha I)^2 = \alpha^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc :

$$P(M) = M(M-\alpha I)^2 = \alpha^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $P(D)(u^{(2)}) = 2\alpha^3\, u^{(0)}$. On peut donc prendre $u = \dfrac{1}{2\alpha^3}\, u^{(2)}$, c'est-à-dire $u_n = \dfrac{1}{2}\, n^2 \alpha^{n-3}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

1.
```
x=linspace(0.2,0.8,20);
n=[50 200 800];
for i=1:3
N=1000;
LY=sum(log(rand(N,n(i))),"c");// sommation des colonnes
C=exp(LY/n(i));
subplot(1,3,i);// place trois graphiques côte à côte
histplot(x,C);
end
```
Ce programme fournit une simulation de trois échantillons $X_1, X_2, \dots, X_n$, de taille $n = 50, 200$ et 800 de la loi $\mathcal{U}[0,1]$, puis une simulation des variables aléatoires $LY = \sum_{i=1}^{n} \ln(L_i)$ et

$$C = \exp\left(\frac{LY}{n}\right) = \prod_{i=1}^{n} (X_i)^{1/n}$$

Les trois histogrammes de la figure montrent une concentration de la distribution empirique des échantillons lorsque n augmente, ce qui suggère une convergence en probabilité de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Par la loi des grands nombres, la suite des moyennes $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(X_i)$ converge en probabilité vers

$$E(\ln(X_1)) = \int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$$

ce qui entraîne par continuité de la fonction exponentielle que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers e^{-1}, qui vaut environ 0.37, ce qui est cohérent avec les sorties graphiques *Scilab*.

EXERCICE PRINCIPAL

Soit a un nombre réel, I un intervalle contenant a et non réduit à ce point et f une application de I dans $\mathbb{R}$.

1. a) Question de cours.

   Justifier que, si f est une fonction continue sur I, alors la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe C^1 sur I .

   b) Dans cette question, on suppose que $a = 0$, $I = [-1, +1]$ et que f est définie par :

   $$\forall x \in I,\ f(x) = \lfloor 2|x| \rfloor \ .$$

   i) Indiquer comment obtenir une représentation graphique de la fonction f à l'aide de Scilab. Quelle sera l'allure de la figure obtenue ?

   ii) Justifier que la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur I et donner l'allure de sa représentation graphique.

Dans la suite, on suppose que I est l'intervalle $[a, +\infty[$ et que f est continue sur I.
On considère également deux applications $g : I \to \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continues sur I, ainsi que deux réels positifs ou nuls k et δ.

2. On suppose que, pour tout $x \in I$, $g(x) \geq 0$ et $f(x) \leq \delta + \displaystyle\int_a^x f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$.

   a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \left(\delta + \displaystyle\int_a^x f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right)\exp\left(-\displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

   b) En déduire que, pour tout $x \in I$, on a : $f(x) \leq \delta \exp\left(\displaystyle\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

3. On suppose maintenant que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq \varphi(x) + k\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

   En s'inspirant de la méthode précédente, montrer que, pour tout $x \in I$, on a l'inégalité :

   $$f(x) \leq \varphi(x) + k\int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{e}^{k(x-t)}\,\mathrm{d}t \ .$$

4. On suppose désormais que, pour tout $x \in I$, on a :

   $$0 \leq f(x) \leq \delta\,(x-a) + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

   Justifier à l'aide de ce qui précède que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On considère une variable aléatoire réelle discrète X admettant des moments jusqu'à l'ordre 4 et vérifiant :

$$\begin{cases} E(X) = \alpha \\ E(X^2) = E(X^4) = 1 \end{cases}.$$

1. Montrer que α est nécessairement compris entre -1 et $+1$.
2. Trouver la loi de X.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. **Question de cours.**

   a) Cours

   b) i)

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x = \pm 1 \\ 1 & \text{si } 0.5 \leq |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| < 0.5 \end{cases}$$

Ce qui donne la figure 1, avec le code *Scilab* suivant.

```
-->x=linspace(-1,1,100);
-->y=floor(abs(2*x));
-->plot(x,y)
```

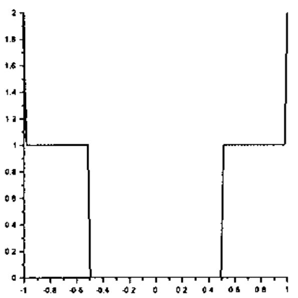


FIGURE 1 – *Représentation graphique de f*

ii)

$$F(x) = \begin{cases} x + 0.5 & \text{si } -1 \leq x < 0.5 \\ 0 & \text{si } -0.5 < |x| < 0.5 \\ x - 0.5 & \text{si } 0.5 < x \leq 1 \end{cases}$$

Ce qui aboutit à la figure 2.

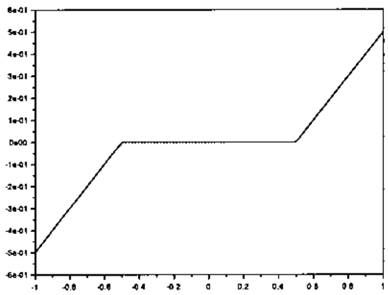


FIGURE 2 – *Représentation graphique de F*

2. a) La fonction $\Phi : x \mapsto \left(\delta + \int_a^x f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right) \exp\left(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$ est dérivable sur I, de dérivée $\Phi' : x \mapsto \left(f(x) - \delta - \int_a^x f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right) g(x)\, \exp\left(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right) \leq 0$.

   b) La fonction Φ décroît donc sur I : par conséquent, pour tout $x \in I$, $\Phi(x) \leq \Phi(a) = \delta$.
Il s'ensuit que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq \delta + \int_a^x f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t \leq \delta \exp\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

3. Notons F la primitive s'annulant en a de f sur I.
L'hypothèse s'écrit, pour tout $x \in I$, $F'(x) \leq \varphi(x) + kF(x)$,
soit aussi $F'(x)\,\mathrm{e}^{-kx} - k\,\mathrm{e}^{-kx}F(x) \leq \varphi(x)\,\mathrm{e}^{-kx}$.
Il s'ensuit que, pour tout $x \in I$, $\left[F(t)\,\mathrm{e}^{-kt}\right]_a^x \leq \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t$,
soit $F(x)\,\mathrm{e}^{-kx} \leq \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t$,
soit encore $F(x) \leq \mathrm{e}^{kx} \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t = \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{e}^{k(x-t)}\,\mathrm{d}t$.
Comme $k \geq 0$, il vient ainsi que, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq \varphi(x) + kF(x) \leq \varphi(x) + k\int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{e}^{k(x-t)}\,\mathrm{d}t$.

4. D'après le résultat de la question **3** avec $\varphi := x \mapsto \delta\,(x-a)$ et $k := 1$, on a pour tout $x \in I$:

$$f(x) \leq \delta\,(x-a) + \int_a^x \delta\,(t-a)\,\mathrm{e}^{x-t}\,\mathrm{d}t = \delta\left(\mathrm{e}^{x-a} - 1\right).$$

Il en résultat par comparaison que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

1. $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - \alpha^2 \geq 0$, d'où $-1 \leq \alpha \leq +1$.
2. Comme $E(X^2) = 1$ et $V(X^2) = E(X^4) - E(X^2)^2 = 0$, on a nécessairement $P([X^2 = 1]) = 1$, c'est-à-dire $P([X = +1]) + P([X = -1]) = 1$, d'où, à l'aide de $E(X) = \alpha$:

$$\begin{cases} P([X = -1]) = \dfrac{1-\alpha}{2} \\ \\ P([X = +1]) = \dfrac{1+\alpha}{2} \end{cases}.$$

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours

   Rappeler la formule donnant une densité de la somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes et les conditions sous lesquelles cette formule est applicable.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

   a) Vérifier que f est une densité de probabilité.

   b) Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle de densité f.

   c) Trouver la loi de $Y = \sqrt{X}$ lorsque X est une variable aléatoire positive admettant f pour densité.

3. a) Pour quelles valeurs réelles de s l'intégrale $\displaystyle\int_s^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-s)}}$ est-elle convergente ?

   b) Calculer alors $\displaystyle\int_s^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-s)}}$ en utilisant le changement de variable $t = \sqrt{\dfrac{x-s}{x}}$.

4. On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes, admettant chacune f pour densité.

   a) Proposer une méthode de simulation en scilab de la variable aléatoire $S = X - Y$.

   b) Démontrer que S est une variable aléatoire à densité et en donner une densité continue sur $\mathbb{R}^*$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION

On considère les deux sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$\begin{cases} F = \text{Vect}\{(1,1,1)\} \\ G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x+y-2z=0\} \end{cases}.$$

Trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est F et l'image G.
Peut-on le choisir diagonalisable ?

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Cours

a) La fonction f est positive, continue sur $\mathbb{R}$ privé des points 0 et 1, et son intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à 1.

b) La fonction de répartition F d'une variable aléatoire de densité f est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Les candidats doivent être capables de repérer la tangente verticale à l'origine, la concavité de f sur $[0,1]$ et sa non-dérivabilité en 1.

c) Par calcul de la fonction de répartition de Y, on constate que Y suit la loi uniforme sur $[0,1]$.

2. a) Pour quelles valeurs réelles de s l'intégrale $\displaystyle\int_s^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-s)}}$ est-elle convergente ?

- Si $s < 0$, l'intégrande n'est pas défini sur l'intervalle $]0, s[$ et l'integrale n'a pas de sens.
- Si $s = 0$, l'intégrale est une intégrale de référence notoirement divergente.
- Si $0 < s < 1$, l'intégrande est continue sur $]s, 1]$ et l'intégrale est convergente par comparaison à une intégrale de référence.
- Si $s = 1$, l'intégrale n'a pas vraiment de sens. La qualifier de convergente ou divergente est affaire de convention.
- Si $s > 1$, l'intégrande n'est pas défini sur l'intervalle $]1, s[$ et l'intégrale n'a pas de sens.

Finalement, $\displaystyle\int_s^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-s)}}$ est convergente si et seulement si $0 < s < 1$.

b) Soit $s \in]0,1[$.

L'application $\phi : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x-s}{x}} = \sqrt{1 - \dfrac{s}{x}}$ définit une bijection de $]s, 1[$ sur $]0, \sqrt{1-s}[$, croissante et de classe C^1 (on est en droit d'exiger ces précisions des candidats).

Il en résulte que l'intégrale obtenue par le changement de variable est convergente et de même valeur que l'intégrale initiale.

On trouve :

$$\int_s^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-s)}} = \int_0^{\sqrt{1-s}} \frac{2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln\big(\frac{1+t}{1-t}\big)\Big]_0^{\sqrt{1-s}} = \ln\big(\frac{1+\sqrt{1-s}}{1-\sqrt{1-s}}\big)$$

3. On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes, admettant chacune f pour densité.

a) D'après la question 2.c, X et Y suivent la même loi que le carré d'une loi uniforme sur $[0,1]$, ce qui permet de simuler S par deux appels à la fonction « rand » .

(1) u=rand() //simulation de U de loi uniforme sur [0,1]
(2) v=rand() //simulation de V, indépendante de U, de loi uniforme sur [0,1]
(3) s=u^2-v^2 //simulation de S

b) Comme S prend ses valeurs entre -1 et $+1$ et comme sa loi est symétrique par rapport à 0 (puisque $X-Y$ et $Y-X$ ont la même loi), elle admet une densité paire et il suffit de calculer le produit de convolution $h = f_X * f_{-Y}$ aux points $s \in]0,1[$.
Pour un tel s, on obtient :

$$h(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, f_{-Y}(s-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_s^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x-s)}} = \frac{1}{4}\ln\Big(\frac{1+\sqrt{1-s}}{1-\sqrt{1-s}}\Big)\ .$$

Finalement, la fonction $h = f_X * f_{-Y}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ privé des seuls points -1, 0 et $+1$ avec :

$$h(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\ln\Big(\dfrac{1+\sqrt{1-|s|}}{1-\sqrt{1-|s|}}\Big) & \text{si } 0 < |s| < 1 \\ 0 & \text{si } |s| > 1 \end{cases}\ .$$

Prolongée par 0 en ± 1 (pour la rendre continue en ces deux points) et par n'importe quelle valeur en 0, h devient une densité de S, continue sur $\mathbb{R}^*$.

Sujet S 170

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Il suffit de choisir un supplémentaire H de F et d'imposer que la restriction de l'endomorphisme à ce supplémentaire réalise un isomorphisme de H sur G.
Si le dialogue s'établit dans le langage matriciel, on pourra demander au candidat d'exhiber la matrice dans la base canonique d'un endomorphisme convenable.

On ne peut pas choisir l'endomorphisme diagonalisable puisque F et G ne sont pas supplémentaires.

EXERCICE PRINCIPAL

Dans tout l'exercice n est un entier strictement supérieur à 2.

1. Question de cours

   a) Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins un polynôme annulateur non nul.

   b) En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admet au moins une valeur propre complexe.

2. Exemple

   Trouver les valeurs propres complexes et les polynômes annulateurs de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   On considère l'endomorphisme φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = AM + MB$.

   a) Calculer $\varphi(X^tY)$ lorsque $AX = \lambda X$ et ${}^tBY = \mu Y$, où λ et μ sont des nombres réels, X et Y des matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

   b) En déduire que toute somme d'une valeur propre réelle de A et d'une valeur propre réelle de B est une valeur propre de l'endomorphisme φ.

   c) Démontrer que, si A et B sont des matrices symétriques, alors φ est diagonalisable.

4. Soit maintenant A et B deux matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   On note alors φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\varphi(M) = AM + MB$
   Soit ν une valeur propre de φ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

   a) Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a : $MP(B) = P(\nu I_n - A)M$.

   b) On pose $P(X) = \prod_{k=1}^{m}(X - b_k)$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, annulateur de B.
   Montrer que la matrice $P(\nu I_n - A)$ n'est pas inversible et en déduire qu'il existe $k \in \{1, \cdots, m\}$ tel que $\nu - b_k$ soit valeur propre de A.

   c) Montrer que ν est la somme d'une valeur propre de A et d'une valeur propre de B.

Exercice sans préparation

Donner la finalité du progamme suivant :

```
N=100000;S=0;
for i=1:N
    u=rand();
    S=S+4/N*1/(1+u^2);
end
disp(S)
```

On pourra penser à la loi des grands nombres.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Cours

2. Les valeurs propres sont $1+i$ et $1-i$, et les polynômes annulateurs les multiples de X^2+2X+2.

3. a) $\varphi(X^tY) = AX^tY + X^tYB = \lambda X^tY + X\mu^tY = (\lambda+\mu)X^tY$.

b) On choisit X et Y non nulles telles que $AX = \lambda X$ et ${}^tBY = \mu Y$ (μ est valeur propre de B donc de ${}^tB$), et on applique le résultat précédent, qui prouve que $\lambda + \mu$ est valeur propre de φ et que la matrice non nulle X^tY est un vecteur propre associé.

c) Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de A (non nécessairement distinctes) et $\mu_1, \cdots, \mu_n$ celles de ${}^tB$.
Soient $(X_1, \cdots, X_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de A et $Y_1, \cdots, Y_n$ une base orthonormée de vecteurs propres de ${}^tB$.
La famille $(X_i^tY_j)_{1\leq i,j\leq n}$, formée de n^2 vecteurs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est libre.
En effet si $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}X_i^tY_j = 0$, alors, pour tout $1 \leq k \leq n$ et tout $1 \leq l \leq n$ on a

$$ {}^tX_k\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}X_i^tY_j\right)Y_l = \alpha_{k,l} = 0 \; . $$

La famille $(X_i^tY_j)_{1\leq i,j\leq n}$ est donc une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, formée de vecteurs propres pour φ. Il en résulte que φ est diagonalisable.

4. a) On a $\varphi(M) = \nu M = AM + MB$. Donc $MB = (\nu I - A)M$ et par récurrence immédiate, pour tout k entier, $MB^k = (\nu I - A)^kM$.
Plus généralement, pour $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_mX^m$, on a :

$$ MP(B) = M(a_0I + a_1B + \cdots + a_mB^m) = (a_0I + (\nu I - A)M + \cdots (\nu I - A)^mM = (P(\nu I - A))M \; . $$

b) Comme P est un polynôme annulateur de B, on a $(P(\nu I - A))M = 0$, d'après le résultat précédent.
Si $P(\nu I - A)$ était inversible, en multipliant à gauche la relation précédente par l'inverse de $P(\nu I - A)$, on aurait $M = 0$ ce qui est impossible puisque M est vecteur propre.
La matrice $P(\nu I - A) = \prod_{k=1}^{m}(\nu I - A - b_kI)$ n'est donc pas inversible. Il existe donc un entier $k \in \{1, \cdots, m\}$ tel que $(\nu I - A - b_kI)$ soit non inversible, ce qui signifie que $\nu - b_k$ est valeur propre de A.

c) On peut choisir P de telle manière qu'il ne possède pas d'autres racines que les valeurs propres de B. Dès lors, le résultat précédent fournit la décomposition cherchée sosu la forme :

$$ \nu = (\nu - b_k) + b_k \; . $$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Le programme permet d'approcher π en utilisant la loi des grands nombres.

En effet, on a $\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ et donc

$$\pi = E(\frac{4}{1+X^2})$$

où X suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

EXERCICE PRINCIPAL

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

1. Question de cours

   a) Rappeler l'énoncé du théorème limite central.

   b) Comment en déduit-on un intervalle de confiance asymptotique pour l'espérance d'une loi admettant un moment d'ordre deux ?

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant toutes une même loi, qui admet un moment d'ordre deux.
On suppose de plus que les variables aléatoires X_n sont centrées et réduites.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\begin{cases} U_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \\ \\ V_n = \dfrac{X_{n+1} + X_{n+2} + \cdots + X_{2n}}{\sqrt{n}} \end{cases}.$$

   Soit $\epsilon > 0$.

   a) Démontrer que $P([U_n \geq \epsilon])$ tend vers $1 - \Phi(\epsilon)$ quand n tend vers l'infini.

   b) Quelle est la limite de $P([V_n \leq -\epsilon])$ quand n tend vers l'infini ?

   c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $Y_n = (\sqrt{2} - 1)U_n - V_n$.

   i) Justifier l'inégalité :

$$P([Y_n \geq \epsilon\sqrt{2}]) \geq P([U_n \geq \epsilon] \cap [V_n \leq -\epsilon]) \cdot$$

   ii) En déduire que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas en probabilité vers 0.

3. On conserve les notations de la question précédente.

   a) Exprimer $U_{2n} - U_n$ en fonction de Y_n.

   b) Démontrer qu'il n'existe pas de variable aléatoire Z telle que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers Z.

Exercice sans préparation

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 2 et M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j} = i^{j-1} .$$

Démontrer que M est inversible.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Cours

b) Soit $\alpha \in]0,1[$ et $c = \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$.

Si la variance σ^2 est connue, $\left[\overline{X}_n - \frac{c\,\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + \frac{c\,\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour m de niveau $1 - \alpha$.

Si la variance σ^2 est inconnue, $\left[\overline{X}_n - \frac{c\,S_n}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + \frac{c\,S_n}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour m de niveau $1 - \alpha$, où $S_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$.

2. a) Par application du théorème limite central, la suite des variables aléatoires U_n converge en loi vers une variable aléatoire Z suivant la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} P([U_n \geq \epsilon]) = P([Z \geq \epsilon]) = 1 - \Phi(\epsilon)$.

b) Comme $X_{n+1} + X_{n+2} + \cdots + X_{2n}$, somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi que X_1, suit la même loi que $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, V_n suit la même loi que U_n. La suite des variables aléatoires V_n converge donc aussi en loi vers Z.
Par conséquent, $\lim_{n\to+\infty} P([V_n \leq -\epsilon]) = P([Z \leq -\epsilon]) = \Phi(-\epsilon) = 1 - \Phi(\epsilon)$.

c) i) Pour tout $\omega \in \Omega$, si $U_n(\omega) \geq \epsilon$ et $V_n(\omega) \leq -\epsilon$, alors

$$Y_n(\omega) = (\sqrt{2} - 1)U_n(\omega) - V_n(\omega) \geq (\sqrt{2} - 1)\epsilon - (\epsilon) = \epsilon\sqrt{2}$$

d'où l'inclusion

$$[U_n \geq \epsilon] \cap [V_n \leq -\epsilon] \subseteq [Y_n \geq \epsilon\sqrt{2}]$$

et l'inégalité

$$P([Y_n \geq \epsilon\sqrt{2}]) \geq P([U_n \geq \epsilon] \cap [V_n \leq -\epsilon]) \cdot$$

ii) D'après le résultat précédent et par indépendance de U_n et V_n (qui résulte du lemme des coalitions), on a :

$$P([|Y_n| \geq \epsilon\sqrt{2}]) \geq P([Y_n \geq \epsilon\sqrt{2}]) \geq P([U_n \geq \epsilon])\,P([V_n \leq -\epsilon]) \longrightarrow \left(1 - \Phi(\epsilon)\right)^2 \text{ quand } n \to +\infty .$$

Il en résulte que $P([|Y_n| \geq \epsilon\sqrt{2}])$ ne peut pas tendre vers 0 quand n tend vers l'infini. Par conséquent, la suite $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ ne converge pas en probabilité vers 0.

3. a) $U_{2n} - U_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(U_n + V_n) - U_n = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,Y_n$.

b) Si la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ convergeait en probabilité vers une variable aléatoire Z, alors la suite des variables aléatoires $U_{2n} - U_n$ convergerait en probabilité vers 0 (on pourra en demander une preuve, car la stabilité par addition de la convergence en probabilité ne figure pas dans le programme)), ce qui est en contradiction avec le résultat précédent.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ tel que $MA = 0$.

$$MA = 0 \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_j\, i^{j-1} = 0 \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ P_A(i) = 0$$

où P_A est le polynôme $\sum_{j=1}^{n} a_j\, X^{j-1}$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Lorsque $MA = 0$, P_A possède n racines distinctes, ce qui prouve que c'est le polynôme nul, donc que la matrice A est nulle.
Par conséquent, M est inversible.

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours

   Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Donner la forme du développement limité à l'ordre un de f en un point et pour $(x,h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, donner l'expression de la dérivée de l'application g définie sur $\mathbb{R}$ et qui à $t \in \mathbb{R}$ associe $g(t) = f(x+th)$.

2. Soit a et b deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\left[a(x+y) + a(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} b(s)\mathrm{d}s\right]$$

   Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et montrer que $\partial^2_{1,1}(f) - \partial^2_{2,2}(f)$ est l'application nulle. Pour $x \in \mathbb{R}$, préciser les valeurs de $f(x,0)$ et de $\partial_2(f)(x,0)$.

3. Dans cette question, f désigne une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

   a) Montrer qu'il existe une unique application g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = g(x+y, x-y)\ .$$

   Dans la suite, on admettra que l'application g ainsi définie est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

   b) Si g désigne l'application définie au a), montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) - \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 4\,\partial^2_{1,2}(g)(x+y, x-y)$$

   c) En déduire que si $\partial^2_{1,1}(f) - \partial^2_{2,2}(f)$ est l'application nulle et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) = \partial_2(f)(x,0) = 0$, alors f est l'application nulle.

4. a) Montrer qu'il existe une unique application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\partial^2_{1,1}(f) - \partial^2_{2,2}(f)$ soit l'application nulle et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) = x^2$ et $\partial_2(f)(x,0) = x$, et déterminer cette application.

   b) Étudier les extremums de f.

EXERCICE SANS PRÉPARATION

On tire (avec remise) une boule d'une urne contenant n boules numérotées.

1. On note T la variable aléatoire égale au numéro du tirage où pour la première fois deux boules différentes ont été tirées.
   Déterminer l'espérance de T.

2. Quelle est la variable aléatoire V_n dont la fonction *Scilab* suivante calcule une simulation ?

```
function compt=V(n)
    A=[];compt=0;
 while length(A)< n
    u=floor(n*rand()+1);
    i=find(A==u); // renvoie les positions de u dans le vecteur A
    if length(i)==0 then
       A=[A,u];
    end;
    compt=compt+1;
 end;
endfunction
```

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Cours

2. Les applications $(x,y) \longmapsto a(x+y)$ et $(x,y) \longmapsto a(x-y)$ sont de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme composée d'une application linéaire qui est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ avec a qui est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Si B désigne une primitive de b sur $\mathbb{R}$, B est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\int_{x-y}^{x+y} b(s)\mathrm{d}s = B(x+y) - B(x-y)$. Finalement f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de telles fonctions.
$\partial_1 f(x,y) = \frac{1}{2}\left[a'(x+y) + a'(x-y) + b(x+y) - b(x-y)\right]$
$\partial_2 f(x,y) = \frac{1}{2}\left[a'(x+y) - a'(x-y) + b(x+y) + b(x-y)\right]$
$\partial^2_{1,1} f(x,y) = \partial^2_{2,2} f(x,y = \frac{1}{2}\left[a''(x+y) + a''(x-y) + b'(x+y) - b'(x-y)\right]$
D'où $\boxed{\partial^2_{1,1} f - \partial^2_{2,2} f = \underline{0} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x,0) = a(x) \text{ et de } \partial_2 f(x,0) = b(x)}$

3. a) L'application $\varphi := (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x+y, x-y) \in \mathbb{R}^2$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ de bijection réciproque $\varphi^{-1} := (u,v) \longmapsto \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$ donc il existe une unique application g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f = g \circ \varphi$ qui est $g = f \circ \varphi^{-1}$.

b) Comme $f(x,y) = g(x+y, x-y) = g((y,-y) + x(1,1))$ on a d'après la formule rappelée en question de cours :
$\partial_1 f(x,y) = \partial_1 g(x+y, x-y) + \partial_2 g(x+y, x-y)$ et
$\partial^2_{1,1} f(x,y) = \partial^2_{1,1} g(x+y,x-y) + \partial^2_{2,1} g(x+y,x-y) + \partial^2_{1,2} g(x+y,x-y) + \partial^2_{2,2} g(x+y,x-y)$
et, d'autre part, $\partial_2 f(x,y) = \partial_1 g(x+y,x-y) - \partial_2 g(x+y,x-y)$ et
$\partial^2_{2,2} f(x,y) = \partial^2_{1,1} g(x+y,x-y) - \partial^2_{2,1} g(x+y,x-y) - \partial^2_{1,2} g(x+y,x-y) + \partial^2_{2,2} g(x+y,x-y)$
d'où le résultat attendu, ,compte-tenu du théorème de Schwarz qui stipule que $\partial^2_{2,1} g = \partial^2_{1,2} g$.

c) D'après b), la condition $\partial^2_{1,1} f - \partial^2_{2,2} f = 0$ équivaut à $\partial^2_{1,2} g = 0$
Il existe donc $a \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\partial_2 g(u,v) = a(v)$
(a est C^1, car par exemple $a(v) = \partial_2 g(0,v)$ et que g est C^2)
Si A désigne une primitive de a, la condition $\partial^2_{1,2} g = 0$ revient donc à l'existence de $B \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ g(u,v) = A(v) + B(u)$$

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x,0) = g(x,x) = A(x) + B(x) = 0$ et $\partial_2 f(x,0) = \partial_1 g(x,x) - \partial_2 g(x,x) = A'(x) - B'(x)$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A(x) = B(x) = 0$.

Conclusion : g est donc l'application nulle et par suite f est également l'application nulle.

4. a) D'après 2., $f_0 := (x,y) \longmapsto \frac{1}{2}\left[(x+y)^2 + (x-y)^2 + \int_{x-y}^{x+y} s\,\mathrm{d}s\right] = x^2 + y^2 + xy$ est solution et, d'après 3., si f est solution $f - f_0$ est la fonction nulle donc f_0 est l'unique solution du problème posé.

b) f est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ et admet un unique point critique : $(0,0)$. En outre, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x+\frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0 = f(0,0)$ donc f admet un minimum (global) en $(0,0)$ et ne peut admettre un extremum local en aucun autre point.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

1. $E(T) = 1 + \dfrac{n}{n-1}$ ·
2.

```
function compt=V(n)
    A=[];compt=0;
 while length(A)<n
    u=int(n*rand()+1);
    i=find(A==u);
    if length(i)==0 then
       A=[A,u];
    end;
    compt=compt+1;
 end;
endfunction
```

La fonction ci-dessus simule la variable aléatoire V_n égale au numéro du tirage où pour la première fois, chaque boule a été tirée au moins une fois.

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours : changement de variable dans une intégrale impropre.

   Dans la suite de l'exercice, toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs réelles.

2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes, à valeurs positives, où Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et X possède une densité.

   a) Montrer que la variable aléatoire $Y - X$ possède une densité et expliciter une telle densité en fonction d'une densité de X et de λ.

   b) En déduire une expression de $P([Y > X])$ sous la forme d'une intégrale et trouver une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $P([Y > X]) = E(f(X))$.

   c) $P([Y > X])$ peut-elle être nulle ?

3. Soit X_1, X_2, Y trois variables aléatoires indépendantes, à valeurs positives, possédant des densités où Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que X_1 possède une densité bornée.

   Montrer que $P([Y > X_1 + X_2]) = P([Y > X_1])P([Y > X_2])$.
   Quelle propriété a-t-on ainsi généralisé ?

4. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $(X_1, \ldots, X_n)$ un système de n variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $M = \max\limits_{1 \leq k \leq n} X_k$.

   a) Calculer $P([X_1 > \sum\limits_{k=2}^{n} X_k])$

   b) En déduire la valeur de $P([M > \dfrac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k])$.

Exercice sans préparation

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien.
On note $\| \ \|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire sur E.

Soit (a, b) une famille libre de vecteurs de E et f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f := t \longmapsto \|a - tb\|$$

Étudier les variations de f et interpréter le minimum de f.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Cours
2. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires indépendantes, à valeurs positives, où Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et X possède une densité.

   a) Notons p une densité de X.

   Comme la densité d'une variable exponentielle est bornée, la variable aléatoire $Y - X$ possède, d'après la question de cours, une densité q donnée par :

$$q(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} 1_{t \geq 0} p(t-z) dt = \int_{max(0,z)}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} p(t-z) dt$$

   soit, en effectuant le changement de variable affine : $s = t - z$,

$$q(z) = \lambda e^{-\lambda z} \int_{max(-z,0)}^{+\infty} e^{-\lambda s} p(s) ds$$

   b) Pour $z \geq 0$, $q(z) = c\lambda e^{-\lambda z}$ où $c = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} p(t) dt$ d'où

$$P(Y > X) = c \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda z} dz = c = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} p(t) dt$$

   On a donc $P(Y > X) = E(f(X))$ avec $f := x \longmapsto e^{-\lambda x}$

   c) La fonction $t \in \mathbb{R}^+ \longmapsto e^{-\lambda t} p(t)$ est à valeurs positives, continue sauf en un nombre fini de points, différente de la fonction nulle (car $\displaystyle\int_0^{+\infty} p(t) dt = 1$) .

   D'où $\quad P(Y > X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} p(t) dt > 0$.

3. On applique le résultat précédent au couple $(X_1 + X_2, Y)$ de variables indépendantes d'après le lemme des coalitions. On a donc $P(Y > X_1 + X_2) = E(e^{-\lambda X_1} e^{-\lambda X_2})$. Or les variables aléatoires $e^{-\lambda X_1}, e^{-\lambda X_2}$ sont indépendantes donc $E(e^{-\lambda X_1} e^{-\lambda X_2}) = E(e^{-\lambda X_1}) E(e^{-\lambda X_2})$ qui vaut encore $P(Y > X_1) P(Y > X_2)$ toujours d'après 2.

   Le résultat précédent peut encore s'écrire $P(Y > X_1 + X_2 | Y > X_1) = P(Y > X_2)$ ce qui généralise la propriété d'absence de mémoire des variables aléatoires de loi exponentielle.

4. a) Le résultat de 2. s'applique au couple $(\sum\limits_{k=2}^{n} X_k, X_1)$ d'où $P(X_1 > \sum\limits_{k=2}^{n} X_k) = E(e^{-\lambda \sum\limits_{k=2}^{n} X_k})$ puis par indépendance des variables aléatoires $e^{-\lambda X_k}$:

$$P(X_1 > \sum_{k=2}^{n} X_k) = \prod_{k=2}^{n} E(e^{-\lambda X_k}) .$$

Or $E(\mathrm{e}^{-\lambda X_k}) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda \mathrm{e}^{-2\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ (on peut également invoquer un argument de symétrie), d'où :

$$P(X_1 > \sum_{k=2}^{n} X_k) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot$$

b) L'événement $[M > \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} X_k] = [M > (\sum_{k=1}^{n} X_k) - M]$ est l'union des événements $[X_j > \sum_{1\leq k\leq n, k\neq j} X_k]$ qui sont disjoints deux à deux, et tous de même probabilité, égale à $\frac{1}{2^{n-1}}$; d'où :

$$P([M > \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} X_k]) = \frac{n}{2^{n-1}} \cdot$$

Sujet S 180

Corrigé de l'exercice sans préparation

L'application $P := t \longmapsto \|a - tb\|^2 = t^2\|b\|^2 - 2t(a|b) + \|a\|^2$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ car la famille (a, b) est libre donc $f = \sqrt{P}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(t) = \dfrac{t\|b\|^2 - (a|b)}{\|a - tb\|}$.

On en déduit, en posant $t_0 = \dfrac{(a|b)}{\|b\|^2}$, que f est strictement décroissante sur $]-\infty, t_0]$ et strictement croissante sur $[t_0, +\infty[$ et admet donc un minimum en t_0 et uniquement en ce point.

Interprétation : Le vecteur $t_0 b$ est la projection orthogonale de a sur la droite vectorielle $D = \mathrm{Vect}(b)$ puisque $t_0 b \in D$ et $(a - t_0 b|b) = 0$ soit $a - t_0 b \in D^\perp$. Le fait que f soit minimale en t_0 est conforme au fait que pour tout $y \in D$, $\|a - y\| \geq \|a - p_D(a)\|$ avec égalité si et seulement si $y = p_D(a)$.

Exercice principal

1. Question de cours

   Énoncer le théorème concernant la réduction des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien et démontrer la propriété concernant les sous-espaces propres d'un tel endomorphisme.

   Dans la suite de l'exercice, on considère un espace euclidien $(E, (\ |\ ))$ de dimension $n \geq 2$.

   On note $T(E)$ l'ensemble des endomorphismes u de E qui sont symétriques, de rang inférieur ou égal à 1 et tels que pour tout $x \in E$, $(u(x)|x) \geq 0$.

2. Si $a \in E$, on note u_a l'application de E dans E qui à tout vecteur x de E associe $u_a(x) = (a|x)a$.

   a) Montrer que pour tout $a \in E$, $u_a \in T(E)$.

   b) Si a est un vecteur non nul de E, préciser les valeurs propres et sous-espaces propres de u_a.

3. Soit u un élément non nul de $T(E)$ et b un vecteur non nul de $\operatorname{Im} u$.

   a) Montrer que b est vecteur propre de u associé à une valeur propre $\mu \geq 0$.

   b) Montrer que pour tout vecteur x de E, $u(x) = \dfrac{\mu}{\|b\|^2}(x|b)b$.

   c) En déduire qu'il existe un vecteur a de E tel que $u = u_a$.

   d) L'application φ de E dans $T(E)$ qui à a associe $\varphi(a) = u_a$ est-elle surjective ? injective ?

4. Soit a un vecteur non nul de E et f un endomorphisme de E

   a) Pour $x \in E$, expliciter $f \circ u_a(x)$.

   b) Montrer que $f \circ u_a$ est symétrique si et seulement si a est vecteur propre de f.

   c) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $f \circ u_a$ appartienne à $T(E)$.

5. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b) \in E^2$ pour que $u_a \circ u_b = u_b \circ u_a$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f, g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont croissantes et bornées.

Étudier le signe de la covariance des variables aléatoires $f(X)$ et $g(X)$: on pourra pour t réel considérer la variable aléatoire $(f(X) - f(t))(g(X) - g(t))$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Cours

2. a) L'appplication u_a est bien linéaire par linéarité à droite du produit scalaire, de rang inférieur ou égal à 1 car $\operatorname{Im} u_a \subset \operatorname{Vect}(a)$, symétrique car $(u_a(x)|y) = (a|x)(a|y) = (x|u_a(y))$ et telle que pour tout x de E, $(u_a(x)|x) = (a|x)^2 \geq 0$.

   b) Si $B = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormée de E telle que $e_1 = \frac{a}{\|a\|}$, $Mat_B(u_a) = \operatorname{Diag}(\|a\|^2, 0, \ldots, 0)$ donc les valeurs propres de u_a sont $\|a\|^2$ et 0 d'espaces propres associés $\operatorname{Vect}(a)$ et $\operatorname{Vect}(a)^\perp$.

3. a) Comme $b \in \operatorname{Im} u \setminus \{0\}$ et que u est de rang inférieur ou égal à 1, $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(b)$ donc il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $u(b) = \mu b$. De plus $(u(b)|b) = \mu\|b\|^2 \geq 0$ donc $\mu \geq 0$.

   b) Soit $x \in E$. Comme $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(b)$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \alpha b$. On a alors d'une part, $(u(x)|b) = \alpha\|b\|^2$ et, d'autre part, $(u(x)|b) = (x|u(b)) = \mu(x|b)$ d'où $\alpha = \frac{\mu}{\|b\|^2}(x|b)$ et finalement, $u(x) = \frac{\mu}{\|b\|^2}(x|b)b$

   c) D'après b), on a $u = u_a$ avec $a = \frac{\sqrt{\mu}}{\|b\|}b$

   d) L'application φ est surjective d'après c) mais n'est pas injective car par exemple $\varphi(-a) = \varphi(a)$ pour tout a.

4. a) Pour tout vecteur x de E, $f \circ u_a(x) = (a|x)f(a)$

   b)

- Si $f(a) = \lambda a$, $f \circ u_a = \lambda u_a$ est symétrique puisque u_a l'est.
- D'après a), pour tout x de E, $(f \circ u_a(x)|a) = (a|x)(f(a)|a) = (x|(f(a)|a)a)$ et $(x|f \circ u_a(a)) = (x|\|a\|^2 f(a))$ donc si $f \circ u_a$ est symétrique, on a pour tout x de E, $(x|(f(a)|a)a - \|a\|^2 f(a)) = 0$ soit $f(a) = \frac{(f(a)|a)}{\|a\|^2}a$ donc a vecteur propre de f

   c) D'après a), $f \circ u_a$ est toujours de rang inférieur ou égal à 1, et d'après b), $f \circ u_a$ est symétrique si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = \lambda a$. Dans ces conditions $(f \circ u_a(x)|x) = \lambda(a|x)^2$. On en déduit que $f \circ u_a \in T(E)$ si et seulement si a est vecteur propre de f associé à une valeur propre positive ou nulle.

5. Pour tout x de E, $u_a \circ u_b(x) = (a|b)(b|x)a$ et $u_b \circ u_a(x) = (a|b)(a|x)b$ donc si u_a et u_b commutent, ou bien $(a|b) = 0$ ou bien pour tout $x \in E$, $(b|x)a - (a|x)b = 0$ ce qui implique (a, b) liée. Réciproquement si $b = \lambda a$, $u_b = \lambda^2 u_a$ commute avec u_a.

   u_a et u_b commutent si et seulement si les vecteurs a et b sont orthogonaux ou colinéaires.

Corrigé de l'exercice sans préparation

Notons que toutes les espérances considérées dans la suite existent car elles concernent des variables aléatoires bornées.

Comme f et g sont croissantes, pour tout réel t, la variable aléatoire $(f(X)-f(t))(g(X)-g(t))$ est à valeurs positives donc d'espérance positive soit

$$\forall t \in \mathbb{R}, E(f(X)g(X)) - f(t)E(g(X)) - g(t)E(f(X)) + f(t)g(t) \geq 0$$

Posons $X(\Omega) = \{x_k,\, k \in I\}$ avec $I \subset \mathbb{N}$ et pour tout $k \in I$, $p_k = P(X = x_k)$
On a alors pour tout $k \in I$, $p_k\big(E(f(X)g(X)) - f(x_k)E(g(X)) - g(x_k)E(f(X)) + f(x_k)g(x_k)\big) \geq 0$
puis, en sommant sur $k \in I$, compte-tenu de la formule de transfert,

$$E(f(X)g(X)) - E(f(X))E(g(X)) - E(g(X))E(f(X)) + E(f(X)E(g(X)) = Cov(f(X), g(X)) \geq 0$$

Sujet S185

Exercice principal

1. Question de cours

   Énoncer un théorème permettant de déterminer la nature d'une série numérique à l'aide d'un équivalent de son terme général.

Dans la suite de l'exercice, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on note $\mathcal{V}$ l'ensemble des variables aléatoires T définies sur cet espace, à valeurs dans $\mathbb{N}$, et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(T \geq n) > 0$.

Si $T \in \mathcal{V}$, on note $u(T)$ la suite de terme général $u_n = P_{[T \geq n]}(T = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que si $T \in \mathcal{V}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{[T \geq n]}(T = n) \in [0, 1[$.

3. a) Si $T \in \mathcal{V}$, exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(T \geq n)$ en fonction des termes de la suite $u(T)$.
   b) Pour quels éléments de $T \in \mathcal{V}$, la suite $u(T)$ est-elle constante ?

4. Soit $T \in \mathcal{V}$. On pose $u(T) = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que la série $\sum u_n$ est divergente.

5. Réciproquement, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $[0, 1[$ telle que la série $\sum u_n$ est divergente, montrer qu'il existe une variable aléatoire T telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(T \geq n) > 0$ et $u_n = P_{[T \geq n]}(T = n)$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ et $B' = (e_1 + e_2, 2e_2 + e_3, 3e_3)$.

1. Existe-t-il un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$ ayant les mêmes composantes dans ces deux bases ?

2. Plus généralement, si B et B' sont deux bases de $\mathbb{R}^n$, à quelle condition existe-t-il un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ ayant les mêmes composantes dans ces deux bases ?

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Cours

2. On a toujours $P_{[T\geq n]}(T=n)\in[0,1]$ et si cette probabilité conditionnelle valait 1, on aurait $P(T=n)=P(T\geq n)$ ou encore $P(T\geq n+1)=0$ ce qui est exclu par hypothèse.

3. a) Si $u(T)=(u_n)$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\dfrac{P(T=n)}{P(T\geq n)}$ et $P(T=n)=P(T\geq n)-P(T\geq n+1)$ d'où $P(T\geq n+1)=(1-u_n)P(T\geq n)$.

On en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\boxed{P(T\geq n)=\prod\limits_{k=0}^{n-1}(1-u_k)}$

b) *Analyse :* Si $T\in\mathcal{V}$ est telle que $u(T)$ est constante égale à p, alors $p\in]0,1[$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(T\geq n)=(1-p)^n$ donc $P(T=n)=(1-p)^n-(1-p)^{n+1}=(1-p)^np$ autrement dit $T+1$ suit une loi géométrique.
Synthèse : Réciproquement, si $T+1\hookrightarrow\mathcal{G}(p)$ avec $p\in]0,1[$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(T\geq n)=(1-p)^n>0$ et $P_{[T\geq n]}(T=n)=\dfrac{(1-p)^np}{(1-p)^n}=p$ donc $u(T)$ est constante.

Donc $\boxed{u(T) \text{ est constante si et seulement si } T+1\hookrightarrow\mathcal{G}(p) \text{ avec } p\in]0,1[}$

4. Comme T est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $P(T\geq n)\underset{n\to+\infty}{\to}0$ donc $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\mathrm{Log}(1-u_k)=\mathrm{Log}\,P(T\geq n)\underset{n\to+\infty}{\to}-\infty$ donc la série $\sum\mathrm{Log}(1-u_n)$ diverge. Dans ces conditions, ou bien (u_n) ne tend pas vers 0 et alors $\sum u_n$ est grossièrement divergente, ou bien $u_n\sim-\mathrm{Log}(1-u_n)$ et alors $\sum u_n$ diverge d'après la question de cours. Dans tous les cas $\boxed{\sum u_n \text{ est divergente}}$

5. Soit $(u_n)\in[0,1[^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ diverge.

• D'après 3.a), si T est une variable aléatoire telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(T\geq n)>0$ et $u_n=P_{[T\geq n]}(T=n)$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(T\geq n)=\prod\limits_{k=0}^{n-1}(1-u_k)$ donc pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$P(T=n)=u_n\prod_{k=0}^{n-1}(1-u_k)\,\cdot$$

• Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $p_n=u_n\prod\limits_{k=0}^{n-1}(1-u_k)$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, $p_n\in[0,1]$.

Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, la propriété : $H(n)$: $\sum\limits_{k=0}^{n}p_k=1-\prod\limits_{k=0}^{n}(1-u_k)$ (l'idée de cette récurrence provient toujours de 3.a))
$H(0)$ est vraie car $1-\prod\limits_{k=0}^{0}(1-u_k)=u_0=p_0$

Supposons $H(n)$. Alors $\sum_{k=0}^{n+1} p_k = 1 - \prod_{k=0}^{n}(1-u_k) + u_{n+1}\prod_{k=0}^{n}(1-u_k) = 1-(1-u_{n+1})\prod_{k=0}^{n}(1-u_k)$ ce qui établit $H(n+1)$.

Comme $\sum u_n$ diverge, il en va de même pour la série $\sum \text{Log}(1-u_n)$ et comme cette série est à termes négatifs ses sommes partielles tendent vers $-\infty$. On en déduit que $\prod_{k=0}^{n}(1-u_k) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc la série $\sum p_n$ converge et a pour somme 1 d'après $H(n)$.

Il existe donc une variable aléatoire T telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(T=n) = p_n$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(T \geq n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} p_k = \prod_{k=0}^{n-1}(1-u_k) > 0$ et

$$P_{[T\geq n]}(T=n) = \frac{u_n \prod_{k=0}^{n-1}(1-u_k)}{\prod_{k=0}^{n-1}(1-u_k)} = u_n$$

CQFD

Sujet S 185

Corrigé de l'exercice sans préparation

$x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3 = x_1(e_1+e_2)+x_2(2e_2+e_3)+x_3(3e_3)$ si et seulement si $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$
L'existence d'un triplet non nul solution du système précédent est assurée par le fait que 1 est valeur propre de la matrice de passage (triangulaire) entre les deux bases B et B'. Si on mène les calculs on trouve que les vecteurs ayant mêmes coordonnées dans les deux bases sont ceux de la droite $\text{Vect}(2e_1 - 2e_2 + e_3)$

Plus généralement, il existera un vecteur de mêmes composantes dans les bases B et B' de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si 1 est valeur propre de la matrice de passage de B à B'.

EXERCICE PRINCIPAL

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et Z une variable aléatoire définie sur cet espace et suivant la loi normale centrée réduite.
Pour tout réel $\nu > 0$, S_ν désigne une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant la loi $\gamma(\nu)$.

1. Question de cours

   a) Donner, pour tout réel $\nu > 0$, l'expression d'une densité de S_ν.

   b) Dans le cas où ν est strictement supérieur à 2, donner une représentation graphique de l'unique densité de S_ν qui est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels strictement positifs, strictement croissante et non majorée.

   Justifier la convergence et trouver la limite de la suite $\left(\dfrac{\lfloor \nu_n \rfloor}{\nu_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et suivant chacune la loi exponentielle de paramètre 1, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $Z_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (X_k - 1)$.

   a) Justifier la convergence en loi de la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers Z.

   b) En déduire la convergence en loi de la suite des variables aléatoires $\dfrac{1}{\sqrt{\nu_n}} \left(S_{\lfloor \nu_n \rfloor} - \lfloor \nu_n \rfloor\right)$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $\delta_n = \nu_n - \lfloor \nu_n \rfloor$.

   a) Justifier, pour tout $x \geq 0$, l'inégalité : $P([S_{\delta_n} \geq x]) \leq P([S_1 \geq x])$.

   b) Montrer que la suite des variables aléatoires $\dfrac{S_{\delta_n}}{\sqrt{\nu_n}}$ converge en probabilité vers 0.

5. À l'aide des résultats précédents, établir la convergence en loi vers Z de la suite des variables aléatoires $\dfrac{1}{\sqrt{\nu_n}} (S_{\nu_n} - \nu_n)$.

Exercice sans préparation

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel euclidien et $(u_1, u_2, \ldots, u_p) \in E^p$.

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{p} \|x - u_k\|^2$ admet un minimum global sur E et le calculer.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Cours

b) Les deux premières dérivées de la densité continue f sont données sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

- $f'(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\nu)}\, \mathrm{e}^{-x}\, x^{\nu-2}(\nu - 1 - x)$
- $f''(x) = \dfrac{1}{\Gamma(\nu)}\, \mathrm{e}^{-x}\, x^{\nu-3}\big[(x - \nu + 1)^2 - (\nu - 1)\big]$

La représentation graphique de f possède une tangente horizontale à l'origine et en son point d'abscisse $\nu - 1$ (qui correspond à la valeur maximale de f). Les deux points d'inflexion de la courbe correspondent à ses points d'abcisse $\nu - 1 \pm \sqrt{\nu - 1}$.

2. L'encadrement $1 \leq \dfrac{\lfloor \nu_n \rfloor}{\nu_n} < 1 + \dfrac{1}{\nu_n}$ prouve la convergence de la suite vers 1, puisque $1/\nu_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

3. a) Il s'agit d'une application directe du théorème limite central puisque l'espérance et la variance des variables i.i.d. X_n sont égales à 1.

b) Par la propriété d'additivité des lois gamma , $S_{\lfloor \nu_n \rfloor}$ suit la loi $\gamma(\lfloor \nu_n \rfloor)$. Par conséquent, la variable aléatoire $\dfrac{1}{\sqrt{\nu_n}}\,(S_{\lfloor \nu_n \rfloor} - \lfloor \nu_n \rfloor)$ a la même loi que la variable aléatoire

$$\frac{1}{\sqrt{\nu_n}} \sum_{k=1}^{\lfloor \nu_n \rfloor}(X_k - 1) = \frac{\sqrt{\lfloor \nu_n \rfloor}}{\sqrt{\nu_n}}\, Z_{\lfloor \nu_n \rfloor}$$

qui, grâce au résultat de la question précédente et au théorème de Slutsky, converge en loi vers la variable aléatoire Z quand n tend vers l'infini.

4. a) Si U désigne une variable aléatoire indépendante de S_{δ_n}, suivant la loi $\gamma(1 - \delta_n)$, on a :

$$P([S_{\delta_n} \geq x]) \leq P([S_{\delta_n} + U \geq x]) = P([S_1 \geq x]) \ .$$

b) Soit $\varepsilon > 0$.

$$P([\frac{S_{\delta_n}}{\sqrt{\nu_n}} \geq \varepsilon]) = P([S_{\delta_n} \geq \varepsilon\sqrt{\nu_n}]) \leq P([S_1 \geq \varepsilon\sqrt{\nu_n}])$$

qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini (puisque $\varepsilon\sqrt{\nu_n}$ tend vers l'infini et que la fonction de répartition de S_1 tend vers 1 en $+\infty$).

5. En introduisant pour tout n une variable aléatoire U_n indépendante de $S_{\lfloor \nu_n \rfloor}$ et suivant la loi $\gamma(\delta_n)$ (et presque sûrement nulle lorsque ν_n est entier), on peut affirmer, grâce à la propriété d'additivité des lois gamma, que la variable aléatoire $\dfrac{1}{\sqrt{\nu_n}}(S_{\nu_n} - \nu_n)$ a la même loi que

$$\frac{1}{\sqrt{\nu_n}}(S_{\lfloor \nu_n \rfloor} + U_n - \nu_n) = \frac{1}{\sqrt{\nu_n}}(S_{\lfloor \nu_n \rfloor} - \lfloor \nu_n \rfloor) + \frac{U_n - \delta_n}{\sqrt{\nu_n}}$$

qui, grâce encore au théorème de Slutsky (et au résultat de la question 3b), converge en loi vers Z quand n tend vers l'infini, parce que $\dfrac{U_n - \delta_n}{\sqrt{\nu_n}}$ converge en probabilité vers 0, ce qui résulte des inégalités $P([|\dfrac{U_n - \delta_n}{\sqrt{\nu_n}}| \geq \varepsilon]) \leq P([\dfrac{U_n + \delta_n}{\sqrt{\nu_n}} \geq \varepsilon]) \leq P([S_1 \geq -\delta_n + \varepsilon\sqrt{\nu_n}])$, par le même argument qu'en 4b.

Corrigé de l'exercice sans préparation

Le plus rapide est d'observer, dans la grande tradition de Pythagore, Koenig et Huygens, que pour le vecteur moyen $\mu = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=1}^{p} u_k$, on a :

$$\sum_{k=1}^{p} \|x - u_k\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \|x - \mu + \mu - u_k\|^2 = p\,\|x - \mu\|^2 + \sum_{k=1}^{p} \|\mu - u_k\|^2$$

puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} < x - \mu, \mu - u_k > = < x - \mu, \sum_{k=1}^{p}(\mu - u_k) > = 0.$

Il en résulte que le minimum global de g sur E est égal à $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \|\mu - u_k\|^2$ et que ce minimum n'est atteint qu'au point $x = \mu$.

Cependant, une approche analytique est sans doute plus naturelle pour les candidats initiés aux charmes des fonctions de plusieurs variables.
Ils pourront calculer avec volupté le gradient de g et découvrir que μ en est l'unique point critique. La positivité en tout point de la matrice hessienne leur permettra ensuite de compléter l'argument :

- Expression matricielle de $f(x)$

$$f(x) = p\,{}^tX\,X - 2\,{}^tX\sum_{k=1}^{p} U_k + \sum_{k=1}^{p} {}^tU_k\,U_k$$

- Gradient de f

$$\nabla(f)(x) = 2p\,(X - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} U_k) = 2p\,(X - M)$$

- Matrice hessienne de f

$$\nabla^2(f)(x) = 2p\,I_n$$

Exercice principal

1. Question de cours : ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.

Soit U et V deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.
Pour $\omega \in \Omega$, on note Q_ω le polynôme défini par : $Q_\omega = X^2 - 2U(\omega)X + V(\omega)$.
On pose :

- $A = \{\, \omega \in \Omega\,;\ \text{le polynôme } Q_\omega \text{ possède une racine double} \,\}$
- $B = \{\, \omega \in \Omega\,;\ \text{le polynôme } Q_\omega \text{ possède deux racines réelles distinctes} \,\}$.

2. a) Montrer que U^2 est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.
b) Montrer que A est un événement et donner la valeur de $P(A)$.

3. a) Montrer que $P\big([U > V]\big) = \dfrac{1}{2}\cdot$
b) Comparer $P(B)$ à $\dfrac{1}{2}\cdot$

4. On pose : $Z = U^2 - V$.
a) Déterminer une densité f_Z de la variable aléatoire Z.
b) Quelle est la fonction de répartition F_Z de Z ?
c) Calculer $P(B)$.

5. Pour $\omega \in \Omega$, on pose : $R_\omega = X^3 - 2U(\omega)X^2 + V(\omega)$.
Quelle est la probabilité que le polynôme R_ω admette une racine multiple ?

Exercice sans préparation

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n, diagonalisables et ayant chacune n valeurs propres distinctes.

Montrer que les matrices A et B commutent si et seulement si elles sont diagonalisables avec la même matrice de passage.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. Cours.

2.a) U^2 est une application de Ω dans $[0,1]$. Si $x<0$, $P(U^2 \leq x)=0$ et si $x \geq 1$, $P(U^2 \leq x)=1$.
Si $0 \leq x < 1$, $[U^2 \leq x] = [0 \leq U \leq \sqrt{x}] \in \mathcal{A}$,
ce qui montre que U^2 est une variable aléatoire et $P(U^2 \leq x) = \sqrt{x}$.
La fonction de répartition de U^2 est continue et de classe C^1 sauf en 0 ; U^2 possède une densité donnée par :

$$f_{U^2}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

b) $A = [U^2 - V = 0]$ est un événement car U^2 et V étant deux variables aléatoires à densité, $U^2 - V$ est une variable aléatoire à densité.
Donc, $A \in \mathcal{A}$ et $P(A) = 0$.

3.a) On a : $\Omega = [U > V] \cup [V > U] \cup [U = V]$ et $P(U = V) = 0$ car $U - V$ est à densité et $P(U > V) = P(V > U)$ par symétrie, donc $P(U > V) = P(V > U) = 1/2$.
b) Comme U est à valeurs dans $[0,1]$, $\forall \omega \in \Omega$, $U^2(\omega) \leq U(\omega)$, donc, $\forall \omega \in \Omega$, $U^2(\omega) - V(\omega) \leq U(\omega) - V(\omega)$.
Or, $B = [U^2 - V > 0]$, donc, $B \subset [U - V > 0] = [U > V] \Longrightarrow P(B) \leq P(U > V) = 1/2$.

4.a) $Z = U^2 - V$ est une variable aléatoire à densité à valeurs dans $[-1,1]$ de densité f_Z telle que :

$$f_Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U^2}(t) f_V(t-x)\,\mathrm{d}t, \text{ soit encore, } f_Z(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} = 1 - \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \displaystyle\int_0^{1+x} \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}} = \sqrt{1+x} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

b) La fonction de répartition F_Z est donnée par : $F_Z(x) = \begin{cases} 2/3(1+x)^{\frac{3}{2}} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ x + 2/3(1 - x^{\frac{3}{2}}) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

c) On a : $P(B) = P(Z > 0) = \displaystyle\int_0^1 f_Z(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1 - \sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

• Supposons d'abord que A et B soient diagonalisables dans une même base $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_n)$ de $\mathbf{R}^n$.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^n$ à la base $\mathcal{U}$.
Les matrices $D = P^{-1}AP$ et $\Delta = P^{-1}BP$ commutent puisqu'elles sont toutes les deux diagonales.
D'où :

$$AB = PDP^{-1}P\Delta P^{-1} = PD\Delta P^{-1} = P\Delta DP^{-1} = P\Delta P^{-1}PDP^{-1} = BA\ .$$

• Supposons maintenant que A et B commutent.

Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres distinctes de A et $u_1, \ldots, u_n$ n vecteurs propres de A, chaque u_i étant associé à λ_i. On sait que $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_n)$ est une base de $\mathbf{R}^n$ et que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dim(E_{\lambda_i}) = 1$.

On peut écrire : $AB(u_i) = B(A(u_i)) = B(\lambda_i u_i) = \lambda_i B(u_i)$.

Si $B(u_i) \neq 0$, alors $B(u_i)$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i.
Or, le sous-espace propre E_{λ_i} est de dimension 1 : c'est une droite vectorielle engendrée par u_i.
Il existe donc un réel μ tel que $B(u_i) = \mu u_i$, ce qui montre que u_i est vecteur propre de B.

Si $B(u_i) = 0$, comme $u_i \neq 0$, u_i est vecteur propre de B associé à la valeur propre 0.

Bilan : $\mathcal{U}$ est aussi une base de vecteurs propres pour B.

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours

   a) Énoncer le théorème de la bijection.

   b) Donner une condition suffisante pour qu'une fonction de répartition soit bijective.

Soit G_1, G_2, …, G_n … une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on note $Z_N = \max\limits_{1 \leqslant n \leqslant N} G_n$ et F_N la fonction de répartition de Z_N.

2. a) Justifier l'existence de l'espérance de Z_N.

   b) Soit le code Scilab

```
Y = zeros(1,5);
for k = [1:5]
  n = 1000;
  N = 10^k;
  X = grand(N,n,"nor",0,1);
  Xmax = max(X,'r'); //vecteur-ligne des maxima des colonnes de X
  Y(k) = mean(Xmax);
end;
disp(Y./sqrt(2*[1:5]*log(10)));
```

   qui retourne l'affichage :

   `0.7093236    0.8216955    0.8755261    0.8996736    0.9138259`

   Expliquer comment il fonctionne et ce qu'il calcule.

3. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

   a) À l'aide d'une intégration par parties, justifier l'équivalence :

$$1 - \Phi(x) \sim \frac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}} \qquad \text{lorsque } x \to +\infty\,.$$

   b) Justifier l'équivalence : $\dfrac{\Phi^{-1}(y)^2}{2} \sim \ln \dfrac{1}{1-y}$ lorsque $y \to 1$

   c) En déduire, pour tout réel $\delta \in]0,1[$, un équivalent de $\Phi^{-1}(\delta^{1/n})$ quand n tend vers $+\infty$.

4. a) Justifier l'égalité : $E(Z_N) = \displaystyle\int_0^1 \Phi^{-1}(u^{1/N})\,\mathrm{d}u$.

   b) Formuler une conjecture sur le comportement de $E(Z_N)$ lorsque $N \to \infty$.

Exercice sans préparation

Soit E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E vérifiant $f^3 = f^2$.

1. Montrer que $E = \ker(f - \mathrm{id}_E) \oplus \ker f^2$.
2. Dans le cas où $E = \mathbb{R}^3$, donner un endomorphisme non diagonalisable f tel que $f^3 = f^2$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Cours

b) Si F est la fonction de répartition d'une variable à densité admettant une densité continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$, alors F définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.

2. a) Par suite de l'inégalité $|Z_N \leq \sum_{i=1}^{N} |G_i|$ et de l'existence des $E(|G_i|)$, l'espérance de Z_N existe, par domination.

b) Pour cinq valeurs de N (10, 100, 1000, 10000 et 100000), le programme *Scilab* simule un échantillon de taille $n = 1000$ de la variable Z_N. Il calcule la moyenne empirique de cet échantillon, qui par la loi des grands nombres fournit une valeur approchée de $E(Z_N)$.

La division de cette moyenne par $\sqrt{2\ln(N)}$ fournit ensuite des valeurs approchées de $\dfrac{E(Z_N)}{\sqrt{2\ln(N)}}$ pour les diverses valeurs de N.

3. a) Lorsque $x > 0$, une intégration par parties permet d'écrire $\Phi(x) = \dfrac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}} - \Psi(x)$, pour $\Psi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2/2}}{t^2}\, dt$.

Comme $0 \leq \Psi(x) \leq \dfrac{\Psi(x)}{x^2}$ pour tout $x > 0$, $\Psi(x)$ est négligeable devant $\Phi(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

Il en résulte que $\Phi(x) \sim \dfrac{e^{-x^2/2}}{x\sqrt{2\pi}}$ lorsque $x \to +\infty$

b) De l'équivalence précédente, on déduit en posant $y = 1 - \Phi(x)$

$$\sqrt{2\pi}\,(\Phi^{-1}(1-y))\ (1-y)\ \exp\Big(\frac{(\Phi^{-1}(1-y))^2}{2}\Big) \longrightarrow 1 \qquad \text{lorsque } y \to 1$$

puis, grâce à l'égalité $\Phi^{-1}(1-y) = -\Phi^{-1}(y)$ et par passage aux logarithmes :

$$\frac{\Phi^{-1}(y)^2}{2} \sim \ln \frac{1}{1-y} \qquad \text{lorsque } y \to 1 \ .$$

c) Par substitution de $\delta^{1/n}$ à y dans l'équivalent précédent, on trouve :

$$\Phi^{-1}(\delta^{1/n}) \sim \sqrt{2\ln(n)}$$

4. a) L'égalité $E(Z_N) = \displaystyle\int_0^1 \Phi^{-1}(u^{1/N})\, du$ provient de la formule de transfert, puisque la variable aléatoire $F_N{}^{-1}(U) = \Phi^{-1}(U^{1/N})$ suit la même loi que Z_N si U est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0,1[$.

b) On peut penser, au vu de l'équivalence précédente et sans contradiction avec les simulations à partir de Scilab, que l'espérance de Z_N est équivalente à $\sqrt{2\ln(N)}$ quand N tend vers l'infini.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

1. Un raisonnement par analyse-synthèse fournit l'unique décomposition de tout vecteur x de E comme la somme de deux vecteurs appartenant aux deux noyaux :

$$x = f^2(x) + (x - f^2(x)) \ .$$

2. L'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $f^3 = f^2$, mais il n'est pas diagonalisable, puisque la somme des dimensions de ses deux sous-espaces propres (associés aux valeurs propres 1 et 0) est égale à 2.

HEC

PARIS

ORAL HEC 2016

MATHÉMATIQUES

EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

Option littéraire B/L

EXERCICE PRINCIPAL B/L 09

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2.
On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E et $\mathcal{C} = \big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On pose : $Q_0 = -X^2 + 1$, $Q_1 = \dfrac{1}{2}(X^2 + X)$ et $Q_2 = \dfrac{1}{2}(X^2 - X)$.

1. Question de cours : Valeur propre et vecteur propre d'un endomorphisme.

2.a) Montrer que $\mathcal{V} = (Q_0, Q_1, Q_2)$ est une base de E. Donner la matrice de passage A de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{V}$.

b) Soit Φ l'application de E dans $\mathbb{R}^3$ définie par : pour tout $P \in E$, $\Phi(P) = \big(P(0), P(1), P(-1)\big)$.
Montrer que Φ est linéaire et bijective.

c) Déterminer la matrice A^{-1}.

3. Soit θ l'application de $\mathbb{R}^3$ dans E définie par : $\theta(a,b,c) = a + bX + cX^2$.

a) Montrer que θ est une application linéaire bijective.

b) Donner la matrice de θ lorsque $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $\mathcal{C}$ et E de la base $\mathcal{V}$.

4. On pose : $\Psi = \Phi \circ \theta$.

a) Justifier que Ψ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et donner sa matrice dans la base canonique $\mathcal{C}$.

b) Montrer que 1 est valeur propre de Ψ et donner un vecteur propre associé.

EXERCICE SANS PRÉPARATION B/L 09

Soit X une variable aléatoire discrète et soit f et g deux fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$ telles que les variables aléatoires $f(X)$ et $g(X)$ admettent des moments d'ordre 2.

1. Établir l'inégalité : $\mathrm{Cov}\big(f(X), g(X)\big) \geqslant 0$ (on introduira une variable aléatoire Y indépendante de X et de même loi).

2. En déduire que si $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ sont deux suites croissantes, alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right).$$

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION B/L 09

1. Les fonctions f et g sont croissantes $\Longrightarrow \big(f(X) - f(Y)\big)\big(g(X) - g(Y)\big) \geqslant 0$.
En passant à l'espérance et en exploitant l'indépendance de X et Y, on obtient :
$E\Big(\big(f(X) - f(Y)\big)\big(g(X) - g(Y)\big)\Big) \geqslant 0 \Longleftrightarrow E\big(f(X)g(X)\big) - E\big(f(X)g(Y)\big) - E\big(f(Y)g(X)\big) + E\big(f(Y)g(Y)\big) \geqslant 0$
$\Longleftrightarrow E\big(f(X)g(X)\big) - E\big(f(X)\big)E\big(g(Y)\big) - E\big(f(Y)\big)E\big(g(X)\big) + E\big(f(Y)g(Y)\big) \geqslant 0.$
Or, X et Y de même loi $\Longrightarrow E\big(f(X)g(X)\big) = E\big(f(Y)g(Y)\big)$, $E\big(f(X)\big) = E\big(f(Y)\big)$ et $E\big(g(X)\big) = E\big(g(Y)\big)$.
D'où : $2E\big(f(X)g(X)\big) - 2E\big(f(X)\big)E\big(g(X)\big) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Cov}\big(f(X), g(X)\big) \geqslant 0$.

2. Il suffit d'appliquer le résultat précédent à X qui suit la loi uniforme discrète sur $[\![1, n]\!]$ et à f et g croissantes telles que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(i) = a_i$ et $g(i) = b_i$.

1. Cours.

2.a). Soit $\lambda,\mu,\nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda Q_0 + \mu Q_1 + \nu Q_2 = 0$, alors en identifiant par degré, on obtient : $-\lambda + (\mu+\nu)/2) = 0$, $(-\lambda+\mu)/2 = 0$ et $\lambda = 0$. On en déduit $\lambda = \mu = \nu = 0$ et la liberté de la famille. Or E est de dimension 3, il s'agit d'une base.

la matrice de passage A de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{V}$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

b) Evident (linéaire)

On a $\Phi(Q_0) = (1,0,0), \Phi(Q_1) = (0,1,0)$ et $\Phi(Q_2) = (0,0,1)$. Ils forment une base de $\mathbb{R}$ donc Φ est bijective.

c), On a $X^2 = Q_1 + Q_2$ donc $1 = Q_0 + X^2 = Q_0 + Q_1 + Q_2$; enfin $X = Q_1 - Q_2$.

On a donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3.a) Evident (linéaire)

$\theta((1,0,0)) = 1 = Q_0+Q_1+Q_2$, $\theta((0,1,0) = X = Q_1-Q_2$ et $\theta((0,0,1)) = X^2 = Q_1 + Q_2$ donc la matrice cherchée est A^{-1}.

4.a) Ψ est la composée d'applications linéaires et va de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même : c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

La matrice de Φ dans $\mathcal{V}$ et $\mathcal{C}$ est I_3 donc la matrice de Ψ dans $\mathcal{C}$ est $M = A^{-1}$.

b) $M - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Son rang est 2 donc 1 est valeur propre.

Le vecteur $(1,1,-1)$ est un vecteur propre associé. On vérifie en effet que $(P(0),P(1),P(-1)) = (1,1,-1)$.

EXERCICE PRINCIPAL B/L 20

1. Question de cours : Définition et propriétés d'une densité de probabilité.

2. a) Établir pour tout $x \in [0,1]$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}}$. On note alors $I(x)$ cette intégrale.

b) Pour $x \in [0,1]$, calculer $I(x)$ (on pourra poser le changement de variable $t = x\sin^2 u$, $0 \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2}$).

3. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note Γ l'ensemble des points M d'abcisse x et d'ordonnée y tels que $-1 \leqslant x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

On choisit M au hasard dans Γ et on note X et Y respectivement, les variables aléatoires égales à l'abcisse et à l'ordonnée de M. On suppose que X et Y sont indépendantes, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et qu'elles suivent la même loi uniforme sur le segment $[-1,1]$.

a) Dessiner Γ.

b) Soit G la fonction de répartition de la variable aléatoire X^2. Montrer que $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

c) *On admet* que si T et Z sont deux variables aléatoires à densité indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de densités respectives f_T et f_Z telles que f_T (ou f_Z) soit bornée, alors la variable aléatoire $T + Z$ admet une densité f_{T+Z} donnée pour tout x réel par : $f_{T+Z}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(y) f_Z(x-y)\,\mathrm{d}y$.

On note h une densité de la variable aléatoire X^2+Y^2. Montrer que $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 2 \\ \dfrac{\pi}{4} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \displaystyle\int_{x-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}} & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$.

d) Calculer $P(X^2 + Y^2 \leqslant 1)$. Interpréter ce résultat.

EXERCICE SANS PRÉPARATION B/L 20

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et f et g deux endomorphismes de E.
Soit β un réel non nul. On suppose que $f \circ g - g \circ f = \beta g$.
On admet que tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie possède au moins une valeur propre.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $f \circ g^n - g^n \circ f = n\beta g^n$.

2.a) Soit x un vecteur propre de f. Montrer que la suite $(g^n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est nulle à partir d'un certain rang.

b) En déduire que f et g ont un vecteur propre commun.

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION B/L 20

1. Par récurrence. La relation est vraie pour $n = 1$. On suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f \circ g^n - g^n \circ f = n\beta g^n$. Alors, $f \circ g^{n+1} = (f \circ g) \circ g^n = (g \circ f + \beta g) \circ g^n = g \circ (f \circ g^n) + \beta g^{n+1}$. L'hypothèse de récurrence $\Longrightarrow f \circ g^{n+1} = g \circ (g^n \circ f + n\beta g^n) + \beta g^{n+1} = g^{n+1} \circ f + n\beta g^{n+1} + \beta g^{n+1} = g^{n+1} \circ f + (n+1)\beta g^{n+1}$.

2.a) On a : $f(x) = \lambda x$ et d'après 1, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(g^n(x)) = g^n(f(x)) + n\beta g^n(x) = \lambda g^n(x) + n\beta g^n(x) = (\lambda + n\beta) g^n(x)$. Donc f admet une infinité de valeurs propres (impossible) sauf s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^p(x) = 0$. La suite $(g^n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est nulle à partir du rang p.

b) Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $g^k(x) \neq 0$ et $g^{k+1}(x) = 0$. Par suite, $f(g^k(x)) = (\lambda + k\beta) g^k(x)$: donc, $g^k(x)$ est un vecteur propre de f et $g(g^k(x)) = g^{k+1}(x) = 0 = 0 \times g^k(x)$: donc, $g^k(x)$ est un vecteur propre de g.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL B/L 20

1- Cours.

2- a) En 0

$u : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}.\sqrt{x-t}}$ est continue sur $]0;x[$

$u(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \times \dfrac{1}{\sqrt{t}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x}}\displaystyle\int_0^{1/2} \dfrac{dt}{\sqrt{t}}$ converge (Riemann), donc, par théorème d'équivalence entre fonctions C^0, $\geqslant 0$, $I(x)$ converge en 0.

En x.

$u(t) \underset{t\to x^-}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-t}}$, d'après la généralisation du critère de Riemann, $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{x} \dfrac{dt}{\sqrt{t}.\sqrt{x-t}}$ converge car $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{x} \dfrac{dt}{\sqrt{x-t}}$ converge. Conclusion, $\boxed{I(x) \text{ converge}}$

b) $u \mapsto x\sin^2 u$ est une bijection de classe C^1 de $[0;\frac{\pi}{2}]$ sur $[0;x]$. $dt = 2x \sin u.\cos u.du$, $\sqrt{\sin^2 u} = |\sin u| = \sin u$, $\sqrt{\cos^2 u} = |\cos u| = \cos u$ sur $[0;\frac{\pi}{2}]$, donc :

$$I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x.\sin u.\cos u}{\sqrt{x\sin^2 u}.\sqrt{x.\cos^2 u}}.du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2.du = \boxed{\pi}$$

3a) Γ est le carré de centre O, de côté de longueur 2 ; deux côtés sont parallèles à (Ox), les deux autres à (Oy).

b) F, fonction de répartition de X et de Y est définie par : $F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq -1 \text{ ou } x \geqslant 1, \\ \frac{x+1}{2} \text{ si } -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$

Soit G la fonction de répartition de X^2.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = P(X^2 \leq x)$.

Si $x \leq 0$, $G(x) = 0$

Si $0 \leq x \leq 1$, $G(x) = F(+\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) = \sqrt{x}$

Si $x \geqslant 1$, $G(x) = 1$

Une densité de X^2 est : $\boxed{f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \text{ ou } x > 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ si } 0 < x \leq 1 \end{cases}}$

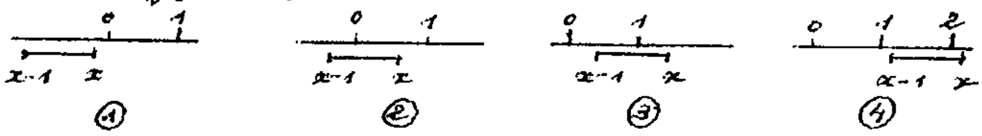
c) X^2 et Y^2 ont la même densité ; elles sont indépendantes ; une densité de X^2+Y^2 est h définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).f(x-t)dt = \int_0^1 f(t)f(x-t)dt$$

car $f(t) = 0$ si $t \leq 0$ ou $t > 1$

$t \in]0,1] \Rightarrow -t \in [-1;0[$, $x-t \in [x-1, x[$.

$f(x-t) \neq 0$ ssi $0 < x-t \leq 1$.



Si $x < 0$ ou $x > 2$ (cas ① et ④), $f(x-t) = 0 \ \forall t \in]0,1[$,

$$h(x) = 0.$$

Si $0 \leq x \leq 1$ (cas ②),

$$h(x) = \frac{1}{4}\int_0^{x} \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}}\,dt = \frac{\pi}{4} \text{ d'après 1-b)}$$

Si $1 \leq x \leq 2$ (cas ③),

$$h(x) = \int_{x-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}}\,dt$$

Récapitulons :

$$\boxed{h(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \text{ ou } x > 2 \\ \frac{\pi}{4} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ \int_{x-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}}\,dt \end{cases}}$$

d) $P(X^2 + Y^2 \leq 1) = \int_0^1 h(t)\,dt = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

C'est la probabilité pour que M soit choisi dans le disque de centre O, de rayon 1.

HEC
PARIS

ORAL HEC 2016

MATHÉMATIQUES

EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

Option économique

EXERCICE PRINCIPAL E 65

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On appelle *médiane* de X tout réel m qui vérifie les deux conditions : $P(X \leqslant m) \geqslant \frac{1}{2}$ et $P(X \geqslant m) \geqslant \frac{1}{2}\cdot$

On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Question de cours : Définition et propriétés de la loi exponentielle.

2.a) Montrer que X admet une unique médiane m que l'on calculera.

b) Soit M la fonction définie sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles, telle que : $\forall x \in \mathbf{R},\ M(x) = E(|X - x|)$.

Étudier les variations de la fonction M sur $\mathbf{R}$ et montrer que m est l'unique point en lequel M atteint son minimum.

3. On suppose que le paramètre λ est inconnu. Soit α un réel vérifiant $0 < \alpha < 1$.
Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Z_n = \min\,(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a) Quelle est la loi de Z_n ?

b) Établir l'existence de deux réels c et d tels que : $P\left(\left[Z_n \leqslant \frac{c}{\lambda}\right]\right) = \frac{\alpha}{2}$ et $P\left(\left[Z_n \geqslant \frac{d}{\lambda}\right]\right) = \frac{\alpha}{2}$.

c) En déduire un intervalle de confiance du paramètre m au niveau de confiance $1 - \alpha$.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 65

1. Cours.

2.a) On a : $\forall x \geqslant 0,\ P(X \leqslant x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$ et les réels m vérifient : $1 - \mathrm{e}^{-\lambda m} \geqslant \frac{1}{2}$ et $\mathrm{e}^{-\lambda m} \geqslant \frac{1}{2}$, donc $\mathrm{e}^{-\lambda m} = \frac{1}{2}\cdot$

Par suite, l'équation $\mathrm{e}^{-\lambda m} = \frac{1}{2}$ fournit l'unique solution : $m = \frac{1}{\lambda}\ln 2$.

b) $\forall x \in \mathbf{R},\ M(x) = E(|X - x|) = \int_0^{+\infty} |u - x|\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = \int_x^{+\infty} (u - x)\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u - \int_0^{x} (u - x)\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u.$

Des calculs (peut-être un peu longs) mais sans difficulté conduisent à : $\forall x \in \mathbf{R},\ M(x) = \frac{2}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda x} + x - \frac{1}{\lambda}\cdot$

L'étude de la fonction M montre bien que $m = \frac{1}{\lambda}\ln 2$ est l'unique point en lequel M atteint son minimum.

3.a) Question classique : $Z_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n\lambda)$.

b) On note G_n la fonction de répartition de Z_n. On cherche c et d (qui sont non nuls) tels que $G_n\left(\frac{c}{\lambda}\right) = \frac{\alpha}{2}$ et $1 - G_n\left(\frac{d}{\lambda}\right) = \frac{\alpha}{2}$, c'est-à-dire $1 - \mathrm{e}^{-n\lambda c/\lambda} = \frac{\alpha}{2}$ et $1 - \mathrm{e}^{-n\lambda d/\lambda} = 1 - \frac{\alpha}{2}$, d'où :

$$c = -\frac{1}{n}\ln(1 - \alpha/2) \quad \text{et} \quad d = -\frac{1}{n}\ln(\alpha/2)\cdot$$

c) On a : $P\left(\frac{c}{\lambda} \leqslant Z_n \leqslant \frac{d}{\lambda}\right) = 1 - \alpha \Longrightarrow P\left(\frac{Z_n}{d} \leqslant \frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{Z_n}{c}\right) = 1 - \alpha$. Or, $m = \frac{\ln 2}{\lambda}$. Par suite,

$$P\left(\frac{\ln 2}{d}Z_n \leqslant m \leqslant \frac{\ln 2}{c}Z_n\right) = 1 - \alpha.$$

Avec les valeurs de c et d calculées précédemment, l'intervalle $\left[\frac{\ln 2}{d}Z_n, \frac{\ln 2}{c}Z_n\right]$ est un intervalle de confiance de la médiane m au niveau de confiance $1 - \alpha$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 65

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes. Montrer qu'un endomorphisme g de E vérifie $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si les vecteurs propres de f sont des vecteurs propres de g.

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION E 65

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres pour f associés aux valeurs propres respectives $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
Le sous-espace propre de f associé à λ_i est la droite engendrée par e_i.

• Si $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont des vecteurs propres de g associés aux valeurs propres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ (non nécessairement deux à deux distinctes), on a : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ f \circ g(e_i) = f(\mu_i e_i) = \mu_i \lambda_i e_i = g(\lambda_i ei) = g \circ f(e_i)$.
Donc, les endomorphismes $f \circ g$ et $g \circ f$ coïncident sur une base et sont donc égaux.

• Réciproquement, si $f \circ g = g \circ f$, on a : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ f \circ g(e_i) = g \circ f(e_i)$, soit $f\big(g(e_i)\big) = \lambda_i g(e_i)$.
Ainsi, $g(e_i)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_i : le sous-espace propre étant la droite engendrée par e_i, le vecteur $g(e_i)$ est colinéaire à e_i et par suite, e_i est un vecteur propre de g.

EXERCICE PRINCIPAL E 82

On suppose que toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : Loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$; définition, propriétés.

2. Pour tout x réel, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.

a) Pour n entier de $\mathbf{N}^*$, montrer que pour tout x réel, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.

b) Établir pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, l'équivalence suivante : $\lfloor y \rfloor \leqslant x \Longleftrightarrow y < \lfloor x \rfloor + 1$.

c) Soit α et β deux réels vérifiant $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$ et soit $N_n(\alpha, \beta)$ le nombre d'entiers k qui vérifient $\alpha < \dfrac{k}{n} \leqslant \beta$.
Exprimer $N_n(\alpha, \beta)$ en fonction de $\lfloor n\,\alpha \rfloor$ et $\lfloor n\,\beta \rfloor$.

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note Y_n la variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P\Big(Y_n = \frac{k}{n}\Big) = \frac{1}{n}\cdot$$

Soit Z une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la variable aléatoire Z_n par : $Z_n = \dfrac{\lfloor n\,Z \rfloor}{n}\cdot$ Soit α et β deux réels vérifiant $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} P(\alpha < Y_n \leqslant \beta) = \beta - \alpha$.

b) Comparer les fonctions de répartition respectives de Y_n et Z_n. Conclusion.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 82

1. Cours.

2.a) Par définition, $\lfloor nx \rfloor \leqslant nx < \lfloor nx \rfloor + 1 \Longrightarrow x - 1/n < \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x \Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x$.

b) • $\lfloor y \rfloor \leqslant x \Longrightarrow \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor \Longrightarrow y < \lfloor y \rfloor + 1 \leqslant \lfloor x \rfloor + 1$.

• $y < \lfloor x \rfloor + 1 \Longrightarrow \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor \leqslant x$.

c) $\forall x > 0$, le nombre d'entiers $k \in]0, x]$ est $\lfloor x \rfloor$. Or, $\{k \in \mathbf{N}; n\alpha < k \leqslant n\beta\} = \{k\,; 0 < k \leqslant n\beta\} / \{k\,; 0 < k \leqslant n\alpha\}$
Donc, $N_n(\alpha, \beta) = \lfloor n\,\beta \rfloor - \lfloor n\,\alpha \rfloor$.

3.a) On a : $[\alpha < Y_n \leqslant \beta] = \displaystyle\bigcup_{n\alpha < k \leqslant n\beta} \Big[Y_n = \frac{k}{n}\Big] \Longrightarrow P(\alpha < Y_n \leqslant \beta) = \sum_{n\alpha < k \leqslant n\beta} P\Big(Y_n = \frac{k}{n}\Big) = \frac{1}{n} N_n(\alpha, \beta)$.

Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} P(\alpha < Y_n \leqslant \beta) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\lfloor n\beta \rfloor - \lfloor n\alpha \rfloor}{n} = \beta - \alpha$.

b) On a : $P(Y_n \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \dfrac{1}{n} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$. D'autre part, $[Z_n \leqslant x] = \Big[\dfrac{\lfloor n\,Z \rfloor}{n} \leqslant x\Big] = \big[\lfloor n\,Z \rfloor \leqslant nx\big]$.

D'après 2.b), on a : $[Z_n \leqslant x] = \big[nZ < \lfloor nx \rfloor + 1\big] = \Big[Z < \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \dfrac{1}{n}\Big] \Longrightarrow P(Z_n \leqslant x) = P\Big(Z < \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \dfrac{1}{n}\Big)$.

Par suite, $P(Z_n \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} + \dfrac{1}{n} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Les variables aléatoires Y_n et Z_n ont la même fonction de répartition, donc elles ont la même loi.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 82

Soit x réel et $M(x)$ la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ définie par : $M(x) = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 2x & 2x \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de x la matrice $M(x)$ est-elle diagonalisable ?

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION E 82

Le réel λ est valeur propre de $M(x)$ ssi la matrice $A(\lambda) = M(x) - \lambda I = \begin{pmatrix} x-\lambda & -1 \\ 2x & 2x-\lambda \end{pmatrix}$ n'est pas inversible c'est-à-dire ssi $P(\lambda) = (x-\lambda)(2x-\lambda) + 2x = \lambda^2 - 3x\lambda + 2x^2 + 2x = 0$. Son discriminant est $\Delta = x(x-8)$.

- Si $x \in]0, 8[$, le polynôme $P(\lambda)$ est toujours strictement positif et la matrice $A(\lambda)$ est inversible, donc M n'est pas diagonalisable.
- Si $x = 0$, alors $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable (0 est l'unique valeur propre).
- Si $x = 8$, alors $M = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 16 & 16 \end{pmatrix} \Longrightarrow P(\lambda) = (\lambda - 1)^2$. Donc, M n'a qu'une valeur propre $\lambda = 12$ et ne peut être diagonalisable.
- Si $x \notin]0, 8[$, le polynôme $P(\lambda)$ admet deux racines distinctes λ_1 et λ_2, donc M admet deux valeurs propres distinctes et est diagonalisable.

EXERCICE PRINCIPAL E 83

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbf{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à cœfficients réels de degré inférieur ou égal à n.

On définit l'application φ de $\mathbf{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbf{R}_n[X],\ \varphi(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

On pose $H_0(X) = 1$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $H_k(X) = \dfrac{X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)}{k\,!}$.

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.

2.a) Montrer que φ est un endomorphisme non bijectif de $\mathbf{R}_n[X]$.

b) Justifier que la famille $\mathcal{B}' = (H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

c) Déterminer la matrice M' de φ dans la base $\mathcal{B}'$.

d) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3. Dans cette question, p est un entier fixé supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, soit f_i l'application de $\mathbf{R}_p[X]$ dans $\mathbf{R}$ définie par : $\forall Q \in \mathbf{R}_p[X],\ f_i(Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} Q(k)$.

a) Justifier que pour tout $i \in [\![0, p]\!]$, l'application f_i est linéaire.

b) Soit $(i, j) \in [\![0, p]\!]^2$. Établir la relation : $f_i(H_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

c) Soit $a_0, a_1, \ldots, a_p$ les réels vérifiant : $X^p = a_0 H_0 + a_1 H_1 + \cdots + a_p H_p$.

Déduire de la question précédente, la relation : $\forall i \in [\![0, p]\!],\ a_i = \displaystyle\sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} k^p$.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 83

1. Cours.

2.a) L'application φ est clairement un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$. La linéarité est évidente ainsi que le fait que le degré de $\varphi(P)$ est inférieur au degré de P. Cet endomorphisme n'est pas injectif (donc non bijectif) car son noyau est formé des polynômes constants.

b) La famille $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de $\mathbf{R}_n[X]$ car c'est une famille de polynômes de degrés échelonnés.

c) Un calcul immédiat donne : $\varphi(H_k)(X) = H_k(X+1) - H_k(X) = H_{k-1}(X)$.

La matrice M' de φ dans la base $\mathcal{B}'$ est donc une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont tous nuls et les éléments de la sur-diagonale sont égaux à 1, les autres éléments étant nuls.

d) La matrice triangulaire M' n'admet que la valeur propre 0 ; par suite, elle n'est pas diagonalisable.

3.a) Soit Q et R deux polynômes de $\mathbf{R}_p[X]$ et α un réel. On a :

$$f_i(\alpha Q + R) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} (\alpha Q + R)(k) = \alpha \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} Q(k) + \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} R(k) = \alpha f_i(Q) + f_i(R).$$

b) Remarquons que si $j \in [\![0, p]\!]$, $H_j(j) = 1$ et pour tout $k \in [\![0, j[\![$, $H_j(k) = 0$.

On a alors : $\forall i \in [\![0, p]\!],\ f_i(H_i) = \displaystyle\sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} H_i(k) = H_i(i) = 1$.

De plus, $\forall j \in [\![0, p]\!],\ f_i(H_j) = \displaystyle\sum_{k=0}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} H_j(k) = \sum_{k=j}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} H_j(k) = \sum_{k=j}^{i} (-1)^{i-k} \binom{i}{k} \frac{1}{j!} \prod_{\ell=0}^{j-1} (k - \ell)$, soit encore, $\forall j \in [\![0,p]\!]$, $f_i(H_j) = \displaystyle\sum_{k=j}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}\binom{k}{j} = \sum_{k=j}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}\binom{i-j}{k-j} = \binom{i}{j}\sum_{k=0}^{i-j}(-1)^{i-k-j}\binom{i-j}{k}$

soit encore, $\forall j \in [\![0,p]\!]$, $f_i(H_j) = \displaystyle\binom{i}{j}(-1)^{i-j}\sum_{k=0}^{i-j}(-1)^{k}\binom{i-j}{k} = 0$ d'après la formule du binôme.

c) On a : $f_i(X^p) = \displaystyle\sum_{k=0}^{i}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}k^p = a_0 f_i(H_0) + a_1 f_i(H_1) + \cdots + a_p f_i(H_p) = a_i$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 83

Les variables aléatoires de cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, on note Y_n une variable aléatoire à valeurs dans $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}\right\}$ telle que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $P\left(Y_n = \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}$.
Soit f une fonction définie et continue sur $[0,1]$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} E\big(f(Y_n)\big) = E\big(f(Z)\big)$.

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION E 83

On sait que (transfert) $E\big(f(Y_n)\big) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)P\Big(Y_n = \frac{k}{n}\Big) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)$, et d'après les "sommes de Riemann" et la continuité de f sur $[0,1]$: $\lim\limits_{n\to+\infty} E\big(f(Y_n)\big) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = E\big(f(Z)\big)$.

EXERCICE PRINCIPAL E 85

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : Définition et propriétés de la covariance de deux variables aléatoires discrètes.

Soit p, q et r des réels fixés de l'intervalle $]0,1[$ tels que $p+q+r=1$. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,0,1\}$, indépendantes et de même loi donnée par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ P(X_n = 1) = p,\ P(X_n = -1) = q,\ P(X_n = 0) = r.$$

On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$.

2.a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, préciser $Y_n(\Omega)$ et calculer $P(Y_n = 0)$.

b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, calculer $E(X_n)$ et $E(Y_n)$.

3. On pose pour tout entier $n \geqslant 1$: $p_n = P(Y_n = 1)$.

a) Calculer p_1 et p_2.

b) Établir une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.

c) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $p_n = \dfrac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2}$.

d) Pouvait-on à l'aide de la question 2, trouver directement la loi de Y_n ?

4.a) Établir l'inégalité : $(p+q)^n > (p-q)^{2n}$. Calculer $V(Y_n)$.

b) Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$ des deux variables aléatoires Y_n et Y_{n+1}.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL E 85

1. Cours.

2.a) $Y_n(\Omega) = \{-1,0,1\}$. Par indépendance et incompatibilité : $P(Y_n \neq 0) = (p+q)^n \Longrightarrow P(Y_n = 0) = 1-(p+q)^n$.

b) On a : $E(X_n) = p - q$ et par indépendance du produit de variables aléatoires, $E(Y_n) = (p-q)^n$.

3.a) On a clairement : $p_1 = p = \dfrac{(p+q)+(p-q)}{2}$ et $p_2 = p^2 + q^2 = \dfrac{(p+q)^2 + (p-q)^2}{2}$.

b) On a : $p_{n+1} = P(Y_{n+1} = 1) = P([Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = 1]) + P([Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = -1]) + P([Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = 0])$.
Or, $[Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = 0] = \emptyset \Longrightarrow P([Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = 0]) = 0$, $[Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = 1] = [X_{n+1} = 1] \cap [Y_n = 1]$ et $[Y_{n+1} = 1] \cap [Y_n = -1] = [X_{n+1} = -1] \cap [Y_n = -1]$. D'après le lemme des coalitions, X_{n+1} et Y_n sont indépendantes $\Longrightarrow p_{n+1} = P(X_{n+1} = 1)P(Y_n = 1) + P(X_{n+1} = -1)P(Y_n = -1) = p\,p_n + q\,P(Y_n = -1)$.
Or, $P(Y_n = -1) = 1 - p_n - P(Y_n = 0) = -p_n + (p+q)^n \Longrightarrow p_{n+1} = (p-q)p_n + q(p+q)^n$.

c) Les valeurs initiales p_1 et p_2, l'hypothèse de récurrence $p_n = \dfrac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2}$ pour un certain n et la relation de récurrence de la question b) $\Longrightarrow \forall n \in \mathbf{N}^*,\ p_n = \dfrac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2}$.

d) Puisque $P(Y_n = 0) = 1 - (p+q)^n$ et que $E(Y_n) = P(Y_n = 1) - P(Y_n = -1) = (p-q)^n$, on a les équations suivantes :

$$\begin{cases} P(Y_n = 1) + P(Y_n = -1) = (p+q)^n \\ P(Y_n = 1) - P(Y_n = -1) = (p-q)^n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} P(Y_n = 1) = \dfrac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2} \\ P(Y_n = -1) = \dfrac{(p+q)^n - (p-q)^n}{2} \end{cases}.$$

4.a) Puisque $0 < p < 1$ et $0 < q < 1$, on a : $0 \leqslant (p-q)^2 = p^2 + q^2 - 2pq < p^2 + q^2 < p + q$.

EXERCICE PRINCIPAL E 86

1. Question de cours : Fonctions équivalentes au voisinage de $+\infty$.

Pour tout entier naturel n, soit f_n la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par : $\forall x \geqslant 0,\ f_n(x) = \int_0^1 t^n \, \mathrm{e}^{-tx} \, \mathrm{d}t$.

2.a) Montrer que pour tout entier naturel n, la fonction f_n est décroissante sur $\mathbf{R}_+$.

b) Étudier la suite $\big(f_n(0)\big)_{n\geqslant 0}$. En déduire pour tout réel $x \geqslant 0$ fixé, la limite de la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\geqslant 0}$.

3.a) Soit x un réel strictement positif. Établir pour tout entier $n \geqslant 1$, la relation : $f_{n+1}(x) = \dfrac{n+1}{x} f_n(x) - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

b) Expliciter les fonctions f_0 et f_1.

c) Montrer que pour tout entier naturel n, $f_n(x)$ est équivalent à $\dfrac{n!}{x^{n+1}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4.a) Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$, on a : $f_n(x) = \dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x u^n \, \mathrm{e}^{-u} \, \mathrm{d}u$.

b) En déduire que la fonction f_n est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et déterminer sa dérivée f_n'.

c) Comparer pour tout réel $y \geqslant 0$, les deux réels y et $1 - \mathrm{e}^{-y}$.

En déduire que pour tout entier naturel n, la fonction f_n est continue en 0.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 86

1.Cours.

2.a) Pour $0 \leqslant x \leqslant y$, la croissance de l'exponentielle et les bornes "bien rangées"$\Longrightarrow f_n(x) \geqslant f_n(y)$.

b) Le calcul donne $f_n(0) = \dfrac{1}{n+1}$ · et la décroissance de f_n sur $\mathbf{R}_+ \Longrightarrow 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(0) = \dfrac{1}{n+1}$.

Par encadrement, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

3.a) Une IPP $\Longrightarrow f_{n+1}(x) = \left[-\dfrac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-tx} t^{n+1}\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 -\dfrac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-tx}(n+1)\,t^n \, \mathrm{d}t = \dfrac{n+1}{x} f_n(x) - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$.

b) On a pour tout $x \geqslant 0$, $f_0(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$ et $f_1(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x}}{x^2}$.

c) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} (1 - \mathrm{e}^{-x} = 1$, on a bien $f_0(x) = \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}$ équivalent à $\dfrac{1}{x} = \dfrac{0!}{x^{0+1}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Soit un entier n tel que $f_n(x)$ est équivalent à $\dfrac{n!}{x^{n+1}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

À l'aide de la question 3.a), on a : $\dfrac{x^{n+2}}{(n+1)!} f_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n!} f_n(x) - \dfrac{x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}}{(n+1)!}$ · Le second membre tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$ d'après l'hypothèse de récurrence.

4.a) Le changement de variable linéaire $u = tx \Longrightarrow f_n(x) = \dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x u^n \, \mathrm{e}^{-u} \, \mathrm{d}u$. Le théorème fondamental de l'intégration permet de dire que $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x u^n \, \mathrm{e}^{-u} \, \mathrm{d}u$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et finalement, on obtient :

$\forall x > 0,\ f_n'(x) = -\dfrac{n+1}{x^{n+2}} \displaystyle\int_0^x u^n \, \mathrm{e}^{-u} \, \mathrm{d}u + \dfrac{1}{x^{n+1}}\, x^n \mathrm{e}^{-x} = -\dfrac{n+1}{x} f_n(x) + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = -f_{n+1}(x)$.

b) Un argument de convexité, par exemple, montre que $\forall y \geqslant 0$, on a : $0 \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-y} \leqslant y$.

On a : $0 \leqslant |f_n(0) - f_n(x)| = \left|\displaystyle\int_0^1 t^n \, \mathrm{d}t - \int_0^1 t^n \, \mathrm{e}^{-tx} \, \mathrm{d}t\right| = \displaystyle\int_0^1 t^n (1 - \mathrm{e}^{-tx}) \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n t x \, \mathrm{d}t = \dfrac{x}{n+2}$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Par encadrement, on a : $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = f_n(0)$ et f_n est continue en 0.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 86

Soit c et r deux réels strictement positifs.

1. Justifier que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{r\,c^r}{x^{r+1}} & \text{si } x > c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Identifier la loi de la variable aléatoire $Y = \ln X - \ln c$.

3. Compléter les lignes du code *Scilab* suivant pour que V soit un vecteur ligne contenant cent réalisations de la loi de la variable aléatoire X.

```
c=input("c=")
r=input("r=")
U=grand( ?, ?, ?, ?)
V=c*exp(U)
```

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION E 86

1. La fonction f est continue sur $\mathbf{R}\backslash\{c\}$, positive et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r\,c^r}{x^{r+1}}\,\mathrm{d}x = 1$

2. $F_X(x) = 0$ si $x \leqslant c$ et $F_X(x) = 1 - \left(\dfrac{c}{x}\right)^r$ si $x > c$. Or, $X(\Omega) =]c, +\infty[\Longrightarrow Y(\Omega) = \mathbf{R}_+^*$.

$\forall y \in \mathbf{R}_+^*,\ P(Y \leqslant y) = P(X \leqslant c\,\mathrm{e}^y) = 1 - \left(\dfrac{c}{c\,\mathrm{e}^y}\right)^r = 1 - \mathrm{e}^{-ry}$, donc $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(r)$.

3.
```
c=input("c=")
r=input("r=")
U=grand(1,n,"exp",1/r)
```
car $E(Y) = 1/r$.
```
V=c*exp(U)
```

EXERCICE PRINCIPAL E 88

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

Dans tout l'exercice, X désigne une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

2.a) On pose : $T = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X). Montrer que la loi de T est donnée par :

$$\forall k \in \mathbf{N},\ P(T = k) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right)\left(\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^k.$$

b) Quelle est la loi de $T + 1$? En déduire l'espérance et la variance de T.

3. On pose : $Z = X - \lfloor X \rfloor$.
Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z.

4. Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, X_n suit une loi exponentielle de paramètre $\dfrac{\lambda}{n}\cdot$ On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$: $Z_n = X_n - \lfloor X_n \rfloor$.

Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 88

1. Cours.

2.a) $T(\Omega) = \mathbf{N} \Longrightarrow \forall k \in \mathbf{N},\ [T = k] = [k \leqslant X < k + 1] \Longrightarrow P(T = k) = \mathrm{e}^{-\lambda k} - \mathrm{e}^{-\lambda(k+1)} = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right)\left(\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^k.$

b) $T + 1$ suit la loi géométrique (classique) de paramètre $1 - \mathrm{e}^{-\lambda} \Longrightarrow E(T+1) = \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}} \Longrightarrow E(T) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}.$

On a : $V(T + 1) = V(T) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{(1 - \mathrm{e}^{-\lambda})^2}\cdot$

3. $Z(\Omega) = [0, 1[$, donc, $F_Z(z) = 0$ si $z < 0$ et $F_Z(z) = 1$ si $z \geqslant 1$. D'autre part, $\{T = k\}_{k \in \mathbf{N}}$ est un sce, d'où,

$\forall z \in [0,1[,\ F_Z(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P\big([Z \leqslant z] \cap [T = k]\big) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(k \leqslant X \leqslant k + z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \big(F_X(k+z) - F_X(k)\big)$, soit encore,

$\forall z \in [0,1[,\ F_Z(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-\lambda k} - \mathrm{e}^{-\lambda(k+z)}\right) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda z})\sum_{k=0}^{+\infty} (\mathrm{e}^{-\lambda})^k = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda z}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}\cdot$

La fonction F_Z est continue sur $\mathbf{R}$, de classe C^1 sur $\mathbf{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1. Donc, Z est une variable aléatoire réelle à densité.

Une densité f_Z de Z est par exemple : $f_Z(z) = \dfrac{\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda z}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}$ si $0 \leqslant z \leqslant 1$ et $f_Z(z) = 0$ sinon.

4. D'après la question 3, $F_{Z_n}(z) = 0$ si $z < 0$, $F_{Z_n}(z) = 1$ si $z > 1$ et $F_{Z_n}(z) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{\lambda z}{n}}}{1 - \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}}}$ si $0 \leqslant z \leqslant 1$.

On sait que $1 - \mathrm{e}^{-u}$ est équivalent à u lorsque u tend vers 0. Par suite, pour $z \neq 0$, $\dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{\lambda z}{n}}}{1 - \mathrm{e}^{-\frac{\lambda}{n}}}$ est équivalent à z lorsque n tend vers $+\infty \Longrightarrow \displaystyle\lim_{n \to +\infty} F_{Z_n}(z) = z$.

En conséquence, la suite $(Z_n)_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 88

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f^4 = f^2$ et $\mathrm{rg}(f^2) = 1$.
Montrer que le spectre de f est $\{0\}$ ou $\{0, 1\}$ ou $\{-1, 0\}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION E 88

Le polynôme $X^4 - X^2 = X^2(X^2 - 1)$ est annulateur de $f \Longrightarrow \mathrm{Sp}(f) \subset \{-1, 0, 1\}$.

- Si 0 n'est pas valeur propre de $f \Longrightarrow f$ est bijective $\Longrightarrow f^2 = \mathrm{id}$ est bijective $\Longleftrightarrow \mathrm{rg}(f^2) = 3$, ce qui est contraire à l'hypothèse.
- Si 1 et -1 sont valeurs propres de $f \Longrightarrow f$ est diagonalisable $\Longrightarrow f^2$ est diagonalisable et semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{rg}(f^2) = 2$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Bilan : le spectre de f est $\{0\}$ ou $\{0, 1\}$ ou $\{-1, 0\}$.

EXERCICE PRINCIPAL E 89

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f_n(x) = \begin{cases} x^n \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2.a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$. On pose : $\forall n \in \mathbf{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$.

b) Déterminer pour tout $n \in \mathbf{N}$, une relation entre I_n et I_{n+2}.

c) Calculer I_0 et I_1.

3.a) Montrer que f_1 est une densité de probabilité.

b) Tracer la courbe représentative de f_1 dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

Dans la suite, on note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant f_1 pour densité.

c) Déterminer la fonction de répartition F de X.

d) Justifier l'existence de l'espérance $E(X)$ et de la variance $V(X)$ de X. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

4. On pose : $Y = X^2$.

a) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité.

b) Quelle est la loi de Y ?

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 89

1. Cours.

2.a) On a : $0 \leqslant x^2 f_n(x) = x^{n+2}\exp(-x^2/2)$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, donc $f_n(x)$ est négligeable devant $1/x^2$ et la règle de Riemann permet de conclure à la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$.

b) On dérive x^{n+1} et on intègre $x\exp(-x^2/2)$ en $-\exp(x^2/2)$. Une IPP sur $[0, A]$ et un passage à la limite lorsque A tend vers $+\infty \Longrightarrow \forall n \in \mathbf{N},\ I_{n+2} = (n+1)I_n$.

c) Par référence à la loi normale centrée réduite et à la parité de $x \longmapsto \exp(-x^2/2)$ sur $\mathbf{R}$, on a : $I_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Une primitive de $x \longmapsto x\exp(-x^2/2)$ est $x \longmapsto -\exp(-x^2/2) \Longrightarrow I_1 = 1$.

3.a) On a : $f_1 \geqslant 0$, continue sur $\mathbf{R}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_1(x)\,dx = I_1 = 1 \Longrightarrow f_1$ est une densité de probabilité.

b) On a : $f'(x) = (1 - x^2)\exp(-x^2/2)$ et $f''(x) = x(x^2 - 3)\exp(-x^2/2)$.

La fonction f_1 est nulle sur $\mathbf{R}_-$, croissante et concave sur $[0, 1]$ et prenant ses valeurs dans $[0, 1/\sqrt{e}]$, puis décroît sur $[1, +\infty[$ en restant concave sur $[1, \sqrt{3}]$ puis convexe au-delà de $\sqrt{3}$.

c) $F(x) = 0$ si $x < 0$ et $F(x) = 1 - \exp(-x^2/2)$ si $x \geqslant 0$.

d) La justication de l'existence de $E(X)$ et $E(X^2)$ a été établie en 2.a).

La relation de récurrence de 2.b) $\Longrightarrow I_2 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ et $I_3 = 2 \Longrightarrow E(X) = I_2 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ et $V(X) = 2 - \pi/2$.

4.a)b) On trouve classiquement : $G(x) = 0$ si $x < 0$ et $G(x) = 1 - \exp(-x/2)$ si $x \geqslant 0$.

La fonction de répartition G de Y est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, donc Y est à densité et plus précisément, on reconnaît en Y une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $1/2$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 89

Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ est : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.

2. On admet sans démonstration que $A^3 = 0$. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ définie par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Quelles sont les valeurs propres de M ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

b) Justifier que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de A et I (matrice identité de $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$).

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION E 89

1. Les deux premières colonnes de A sont opposées : le rang de A est égal à 2.
On a : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\big((-1,0,1),(1,2,1)\big)$ et $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\big((1,1,0)\big)$.

2.a) On a : $M = A + I$. La matrice A est nilpotente et sa seule valeur propre est 0, donc la seule valeur propre de M est 1. Or, M n'est pas semblable (égale) à I, donc M n'est pas diagonalisable.

b) Le réel 0 n'est pas valeur propre de M, donc M est inversible.
On utilise l'identité remarquable : $A^3 + I^3 = (A+I)(A^2 - A + I) \Longrightarrow M(A^2 - A + I) = I \Longrightarrow M^{-1} = A^2 - A + I$.

EXERCICE PRINCIPAL

Toutes les variables aléatoires utilisées dans cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Question de cours : loi faible des grands nombres

   Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. de loi uniforme sur $[0,1]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n la variable aléatoire $\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.
   a) Calculer la fonction de répartition de U_n.
   b) Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, la probabilité $P([U_n \geq \varepsilon])$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

3. Compléter la deuxième ligne du code *Scilab* suivant pour que la fonction "minu" simule la variable U_k pour la valeur k du paramètre.

```
function u=minu(k)
  x= ...
  u=min(x)
endfunction
```

4. Soit $p \in]0,1[$ et Z une variable aléatoire telle que, pour tout réel x :

$$P([Z \leq x]) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} P([U_k \leq x])$$

   (on admet qu'il existe une telle variable aléatoire et qu'elle possède une densité).

   a) Justifier, pour tout $x \in [0,1]$, l'égalité : $P([Z \leq x]) = 1 - \dfrac{p(1-x)}{p+(1-p)x}$.
   b) En déduire une densité de Z.

5. a) Justifier que la fonction *Scilab* suivante fournit une simulation de la variable aléatoire Z de la question précédente.

```
function z=geomin(p)
  z=minu(grand(1,1,'geom',p))
endfunction
```

   b) De quel nombre réel les instructions suivantes fournissent-elles une valeur approchée et pourquoi ?

```
p=0.5;
R=[];
for k=1:10000
  R=[R,geomin(p)]
end;
disp(mean(R))
```

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL E 90

1. Cours.

2.a) $\forall x \in [0,1[$, $P(U_n \leqslant x) = 1 - P(U_n > x) = 1 - P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i > x)\Big) = 1 - (1-x)^n$ par indépendance des X_i.
$\forall x < 0$, $P(U_n \leqslant x) = 0$ et $\forall x > 1$, $P(U_n \leqslant x) = 1$.

b) $P(U_n \geqslant \varepsilon) = (1-\varepsilon)^n \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} P(U_n \geqslant \varepsilon) = 0$ car $0 < 1 - \varepsilon < 1$.

3. On peut utiliser `x=grand(1,n,'def')` ou `x=rand(1,n)`.

4.a) $\forall x \in [0,1]$, $P(Z \leqslant x) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}\big(1-(1-x)\big)^k = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}(1-x)^k$, soit encore,

$$P(Z \leqslant x) = 1 - p(1-x)\sum_{k=1}^{+\infty}\big(q(1-x)\big)^{k-1} = 1 - p(1-x)\frac{1}{1-q(1-x)} = 1 - \frac{p(1-x)}{p+qx} \text{ (avec } q = 1-p).$$

b) Par dérivation, on en déduit : $\forall x \in [0,1]$, $f_Z(x) = \dfrac{p}{(p+qx)^2}\cdot$

5.a) Si N est une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p, alors Z est la variable aléatoire définie par : si $[N = k]$ est réalisé, alors $Z = U_k$ et $P(U_k \leqslant x) = P_{[N=k]}(Z \leqslant x)$.
La commande `grand(1,1,'geom',p)` génère une valeur prise par une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p.

b) Dans le programme, R est un vecteur ligne qui contient 10000 réalisations de Z pour la valeur p du paramètre et on affiche la moyenne de ces valeurs. Le résultat affiché est donc une valeur approchée de l'espérance de Z.

On a : $E(Z) = \displaystyle\int_0^1 \frac{px}{(p+qx)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{p}{q}\Big(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{p+qx} - \int_0^1 \frac{p\,\mathrm{d}x}{(p+qx)^2}\Big) = -\frac{p}{q^2}\ln p - \frac{p}{q}\cdot$
Pour $p = 1/2$, on a $E(Z) = 2\ln 2 - 1$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION E 90

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit f_n la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{nt^2}\,\mathrm{d}t - \int_x^1 \mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

1. Montrer que la fonction f_n est strictement monotone sur $[0,1]$.

2.a) Établir l'existence d'un unique réel de $[0,1]$, noté c_n, tel que $\displaystyle\int_0^{c_n} \mathrm{e}^{nt^2}\,\mathrm{d}t = \int_{c_n}^1 \mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t$.

3.a) Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION 90

1. Le théorème fondamental du calcul intégral (continuité des intégrandes) permet de dire que f_n est dérivable et on a : $f_n'(x) = \mathrm{e}^{nx^2} + \mathrm{e}^{-nx^2} > 0 \Longrightarrow f_n$ est strictement croissante sur $[0,1]$.

2.a) La fonction f_n continue et strictement croissante sur $[0,1]$ réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[f_n(0), f_n(1)]$. Il est clair que $f_n(0) = -\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 0$ et $f_n(1) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{nt^2}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. Par suite, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $c_n \in [0,1]$, c'est-à-dire : $\displaystyle\int_0^{c_n} \mathrm{e}^{nt^2}\,\mathrm{d}t - \int_{c_n}^1 \mathrm{e}^{-nt^2}\,\mathrm{d}t = 0$.

b) On a : $f_{n+1}(c_{n+1}) = 0$ et $f_{n+1}(c_n) = \displaystyle\int_0^{c_n} \mathrm{e}^{(n+1)t^2}\,\mathrm{d}t - \int_{c_n}^1 \mathrm{e}^{-(n+1)t^2} \geqslant 0 = f_n(c_n) = f_{n+1}(c_{n+1})$ par croissance de la fonction exponentielle. Donc, $0 = f_{n+1}(c_{n+1}) \leqslant f_{n+1}(c_n)$ et puisque f_{n+1} est strictement croissante sur $[0,1]$, on a : $c_{n+1} \leqslant c_n$. La suite $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et minorée par 0, donc elle est convergente.

HEC
PARIS

ORAL HEC 2016

MATHÉMATIQUES

EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

Option technologique

EXERCICE PRINCIPAL T 14

La probabilité d'un événement B est notée $P(B)$ et si $P(B) \neq 0$, la probabilité conditionnelle d'un événement A sachant B est notée $P_B(A)$.

1. Question de cours : Le modèle binomial.

Soit n un entier supérieur à 1. Une urne contient 3 boules numérotées 1,2 et 3. On tire successivement n boules avec remise et pour $k = 1, 2, 3$, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules portant le numéro k qui ont été tirées.

2.a) Reconnaître les lois de X_1, X_2 et X_3.

b) Rappeler l'espérance et la variance de X_1.

c) Que vaut $X_1 + X_2 + X_3$? Calculer la covariance de X_1 et X_2. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

3.a) Soit i un entier tel que $0 \leqslant i \leqslant n$ et soit j un entier tel que $0 \leqslant j \leqslant n - i$. Établir la relation :

$$P_{[X_1=i]}([X_2 = j]) = \binom{n-i}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i}.$$

b) En déduire pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $0 \leqslant i + j \leqslant n$, $P([X_1 = i] \cap [X_2 = j])$.

4. On prend $n = 3$. Donner la loi conjointe du couple (X_1, X_2). On représentera les résultats dans un tableau.

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL T 14

1. Cours

2.a) Pour tout $i = 1, 2, 3$, on a $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$.

b) On a : $E(X_i) = \frac{n}{3}$ et $V(X_i) = \frac{2n}{9}$.

c) $X_1 + X_2 + X_3 = n$. D'où $V(X_1 + X_2 + X_3) = V(n) = 0$, soit encore (la variance d'une somme de deux variables est au programme ; à eux de voir comment faire avec trois),

$0 = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + 2\operatorname{Cov}(X_1, X_2) + 2\operatorname{Cov}(X_1, X_3) + 2\operatorname{Cov}(X_2, X_3) = 3V(X_1) + 6\operatorname{Cov}(X_1, X_2)$

D'où, $\operatorname{Cov}(X_1, X_2) = -\frac{V(X_1)}{2} = -\frac{n}{9}$. Cette covariance n'étant pas nulle, X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

3.a) La loi conditionnelle de X_2 sachant $[X_1 = i]$ correspond au schéma binomial dans une urne de taille $n - i$ et de probabilité de succès égal à $\frac{1}{2}$. D'où : $\forall j \in [\![0, n - i]\!]$, $P_{[X_1=i]}([X_2 = j]) = \binom{n-i}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i}$.

b) On sait que $P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = P_{[X_1=i]}([X_2 = j]) \times P([X_1 = i])$. Par suite, on a :

pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $0 \leqslant i + j \leqslant n$, $P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \binom{n}{i}\binom{n-i}{j}\binom{n-i-j}{n-i-j}\frac{1}{3^n}$,

soit, $P([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\frac{1}{3^n}$ (loi trinomiale).

4. On pose $p_{i,j} = P([X_1 = i] \cap [X_2 = j])$. On trouve : $p_{0,0} = 1/27$, $p_{0,1} = 1/9$, $p_{0,2} = 1/9$, $p_{0,3} = 1/27$, puis, $p_{1,0} = 1/9$, $p_{1,1} = 2/9$, $p_{1,2} = 1/9$, $p_{1,3} = 0$, puis $p_{2,0} = 1/9$, $p_{2,1} = 1/9$, $p_{2,2} = 0$, $p_{2,3} = 0$, et enfin, $p_{3,0} = 1/27$, $p_{3,1} = p_{3,2} = p_{3,3} = 0$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION T 14

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$, à valeurs réelles, donnée par : $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.

1. Établir, sans calculs d'intégrales, l'encadrement : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}$.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION T 14

1. Sur $[0,1]$, on a $f(x) \geqslant 0$. D'autre part, $f'(x) = -\dfrac{2}{(1+x)^2}$ et $f''(x) = \dfrac{4}{(1+x)^3} > 0$, donc la fonction f est convexe sur $[0,1] \Longrightarrow \forall x \in [0,1],\ 0 \leqslant f(x) \leqslant -x+1 \Longrightarrow 0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 (-x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

2. Par exemple, $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{2}{1+x} - 1 \Longrightarrow \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 1$.

EXERCICE PRINCIPAL T 17

1. Question de cours : Propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

2. Pour tout réel $a > 0$, soit f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telle que : $f_a(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Pour quelle valeur de a la fonction f_a est-elle une densité de probabilité ?

Pour cette valeur de a, on note f cette densité. Dans la suite de l'exercice, on note X une variable aléatoire à densité de densité f.

3.a) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.

b) Tracer la courbe représentative de F dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

c) Résoudre l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$.

4. Pour n entier supérieur ou égal à 2, soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X.

On pose pour tout $n \geqslant 2$, $T_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et on admet que T_n est une variable aléatoire à densité.

On a donc pour tout x réel, l'égalité d'événements suivante : $[T_n \geqslant x] = [X_1 \geqslant x] \cap [X_2 \geqslant x] \cap \ldots \cap [X_n \geqslant x]$.

On note G la fonction de répartition de T_n et g une densité de T_n.

a) Déterminer pour tout x réel, $G(x)$ et en déduire pour tout x réel, $g(x)$.

b) Soit un réel $A > 1$. Calculer pour tout entier $r \geqslant 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^A x^r g(x)\,\mathrm{d}x$.

c) Pour quelles valeurs de r la limite de $\displaystyle\int_1^A x^r g(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque A tend vers $+\infty$, est-elle finie ?

CORRIGÉ EXERCICE PRINCIPAL T 17

1. Cours.

2. On trouve $a = 2 \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

3.a) On trouve : $F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

b) La fonction F est nulle sur $]-\infty, 1]$ puis est strictement croissante, concave et tend vers 1 à l'infini.

c) $F(x) = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow x = \sqrt{2}$.

4.a) On trouve : $G(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^{2n}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2n}{x^{2n+1}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

b)c) $\displaystyle\int_1^A x^r g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2n}{r-2n}\left(A^{r-2n} - 1\right) \Longrightarrow \lim_{A \to +\infty} \frac{2n}{r-2n}\left(A^{r-2n} - 1\right) = \begin{cases} \dfrac{2n}{2n-r} & \text{si } r < 2n \\ +\infty & \text{si } r \geqslant 2n \end{cases}$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION T 17

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

On rappelle que $A^0 = I$ (matrice unité d'ordre 3).

1. Calculer les matrices A^2 et A^3.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, la matrice A^n est de la forme $\begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}$ et donner les relations de récurrence vérifiées par les suites $(a_n)_{n \geqslant 0}$ et $(b_n)_{n \geqslant 0}$.

CORRIGÉ EXERCICE SANS PRÉPARATION T 17

1. On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 & 3/8 \\ 3/8 & 1/4 & 3/8 \\ 3/8 & 3/8 & 1/4 \end{pmatrix}$.

2. La proposition est vraie pour $n = 0$ avec $b_0 = 0$ et $a_0 = 1$ ainsi que pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

On suppose la propriété vraie au rang n ; alors : $A^{n+1} = \begin{pmatrix} b_n & 1/2(a_n + b_n) & 1/2(a_n + b_n) \\ 1/2(a_n + b_n) & b_n & 1/2(a_n + b_n) \\ 1/2(a_n + b_n) & 1/2(a_n + b_n) & b_n \end{pmatrix}$ et la propriété est encore vraie au rang $n + 1$ avec $a_{n+1} = b_n$ et $b_{n+1} = 1/2(a_n + b_n)$.