Interro Express n°1

Durée: 40 minutes

*Toutes les réponses doivent êtres **justifiées**.*

Exercice 1. (Systèmes linéaires)

(1) On résout le système par Pivot de Gauss

$$\begin{cases} x+y-3z-t &= 0 \\ 2x+y-5z+4t &= 4 \\ x-2y+3t &= -2 \\ -x+y+z-2t &= -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-3z-t &= 0 \\ y-z-6t &= -4 \\ -3y+3z+4t &= -2 \\ 2y-2z-3t &= -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-2z+5t &= 4 \\ y-z-6t &= -4 \\ -14t &= -14 \\ -9t &= -7 \end{cases}$$

Les deux dernières lignes sont incompatibles et le système n'a donc aucune solution.

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

(2) On résout par un Pivot de Gauss, jusqu'à apparition d'un pivot dépendant du paramètre ce qui entraînera une distinction de cas, selon que ce pivot s'annule ou non.

$$\begin{cases} x-y+z &= m \\ x+my-z &= 1 \\ x-y-z &= 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x-y+z &= m \\ (m+1)y-2z &= 1-m \\ 2z &= m-1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x-2y &= m+1 \\ (m+1)y &= 0 \\ 2z &= m-1 \end{cases}$$

- Si $m=-1$, alors le système devient

$$\begin{cases} 2x-2y &= 0 \\ 2z &= -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= y \\ z &= -1 \end{cases}$$

et l'ensemble des solutions s'écrit

$$\mathcal{S} = \{(x,x,-1) : \ x \in \mathbb{R}\}.$$

- Si $m \neq -1$, alors on peut diviser par $m+1$ et on obtient

$$\begin{cases} 2x-2y &= m+1 \\ y &= 0 \\ 2z &= m-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= (m+1)/2 \\ y &= 0 \\ z &= (m-1)/2 \end{cases}.$$

Le système admet dans ce cas une unique solution,

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{m+1}{2}, 0, \frac{m-1}{2} \right) \right\}.$$

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{e^{3x}+x-1}\right)$.

(1) En posant $g(x) = e^{3x}+x-1$, on définit une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc *a fortiori* sur $[0;+\infty[$. De plus, $g'(x) = 3e^{3x}+1$ qui est clairement une quantité strictement positive si $x \geq 0$, donc g est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Il suit que, pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq g(0) = 0$, ce qui donne bien l'égalité demandée. (On remarque d'ailleurs, grâce à la stricte croissante de g, que si $x > 0$, alors $g(x) > 0$, ce qui permet bien d'affirmer que la fonction f est bien définie sur $]0;+\infty[$.)

(2) On constate qu'on peut écrire, pour $x > 0$, $f(x) = \ln(\sqrt{g(x)})/2 = \ln(g(x))/4$. La fonction g est continue en 0 et tend vers $g(0) = 0$, tout en restant positive si $x > 0$. Par composition avec le logarithme, il suit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ si $x \to 0^+$. On conclue donc à la présence d'une asymptote verticale en 0.

(3) Comme la fonction $g(x)$ tend clairement vers $+\infty$ lorsque x fait de même, par composition avec le logarithme, on en déduit que $f(x)$ tend aussi vers $+\infty$. On compare donc la croissance de f à celle de la fonction $x \mapsto x$:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &= \frac{1}{4} \times \frac{\ln(e^{3x}+x-1)}{x} \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{\ln\left(e^{3x}(1+xe^{-3x}-e^{-3x})\right)}{x} \\
&= \frac{\ln(e^{3x}) + \ln(1+xe^{-3x}-e^{-3x})}{4x} \\
&= \frac{3}{4} + \frac{\ln(1+xe^{-3x}-e^{-3x})}{4x} \\
&\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4},
\end{aligned}$$

car $xe^{-2x} \to 0$ (croissance comparée) et $e^{-2x} \to 0$. Il faut donc maintenant regarder la limite de $f(x) - (3/4)x$:

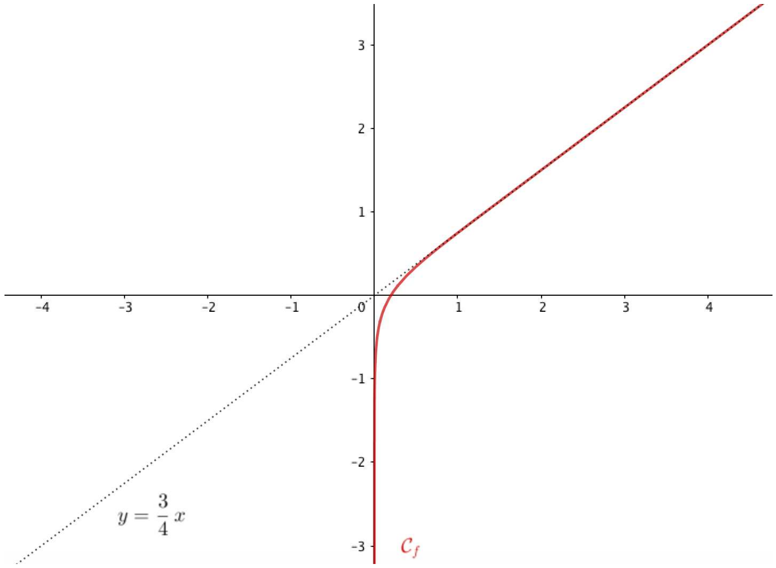
$$\begin{aligned}
f(x) - \frac{3}{2}x &= \frac{1}{4}\left(3x + \ln(1+xe^{-3x}-e^{-3x})\right) - \frac{3}{4}x \\
&= \frac{\ln(1+xe^{-3x}-e^{-3x})}{4} \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que la droite d'équation $y = (3/4)x$ est asymptote oblique en $+\infty$.

(4) La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. En effet, le numérateur est dérivable car la quantité à l'intérieur de la racine est strictement positive. Par les formules de dérivation, on a, pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{3e^{3x}+1}{e^{3x}+x-1}\right) > 0$$

d'après les questions précédentes (notamment la toute première). Il suit que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Bien que cela ne soit pas demandé, on représente ci-dessous l'allure de la courbe:


$y = \frac{3}{4}x$
$\mathcal{C}_f$
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4