ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Interro Express n°2

Durée: 40 minutes

Exercice 1. (Dénombrements). Les questions de cet exercice sont indépendantes.

(1) Trois amis se rendent à un restaurant, chacun avec sa voiture (bonjour l'écologie). Ils confient les clés au voiturier qui les a mélangées avec toutes les autres clés dont le total est égal à n. Au moment où ceux-ci paient l'addition, il leur rapporte donc leurs clés, choisies au hasard parmi toutes les clés. Combien y a-t-il de distributions de clés possibles?

(2) On tire trois cartes dans un jeu de 32 (sans remise). Combien y a-t-il de main avec exactement un as et un coeur?

(3) On veut photocopier un polycopié de n pages. Malheureusement un mauvais réglage mélange toutes les feuilles (originales et copies - qu'on ne peut distinguer) dans le bac de sortie. On alors tire au hasard deux feuilles et on regarde les deux numéros de pages correspondantes.
   (a) Combien y a-t-il tirages différents ($i.e$ de paires de numéros différents)?
   (b) Combien de tirages sont composés d'un orignal et de sa copie?

Exercice 2. Soient E un ensemble et A une partie de E telle que $A \notin \{\emptyset; E\}$. On définit l'application f_A par

$$f_A : \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & \{0;1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

(1) L'application f_A est-elle injective? surjective? bijective?
(2) Montrer que $1 - f_A = f_{\overline{A}}$.
(3) Soient B une autre partie de E et f_B la fonction correspondante. Que peut-on dire de $f_A f_B$?

Exercice 3. Un livre comporte 14 chapitres. Un étudiant paresseux décide de n'en lire que 3.

(1) Combien y a-t-il de façons de choisir ces trois chapitres?
(2) Soit $k \in \{3, 4, 5, ..., 14\}$ fixé. Dénombrer les choix de trois chapitres pour lesquels k est le plus grand numéro des chapitres choisi (*exemple*: si $k = 3$, il n'y a qu'un seul choix possible; celui des chapitres 1, 2 et 3).
(3) En déduire que

$$\binom{14}{3} = \sum_{k=2}^{13} \binom{k}{2}.$$

(4) Dans cette dernière question, on veut généraliser le résultat de la question précédente. Montrer, par récurrence sur $n \geq 1$ que, pour tout $p \in \{1, 2, ..., n\}$, on a

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$