ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Interro Express n°2

Durée: 40 minutes

Exercice 1. (Dénombrements). Les questions de cet exercice sont indépendantes.

(1) Il s'agit du choix ordonné (sans répétition) de 3 éléments parmi n, il y a donc $A_n^3 = n(n-1)(n-2)$ distributions de clés possibles.

(2) Il faut distinguer les mains qui contiennent l'as de coeur et les autres.
- Si la main contient l'as de coeur, il faut completer avec deux cartes qui ne sont ni des as, ni des coeur et donc choisir 2 cartes parmi $32-8-3 = 21$, et on a donc $\binom{21}{2} = (21\times20)/2 = 210$ façons de le faire.
- Si la main ne contient pas l'as de coeur, il faut choisir un as parmi les trois autres, puis un coeur parmi les 7 autres et enfin une troisième carte qui n'est ni un coeur, ni un as (21 choix possibles). Il y a donc $3 \times 7 \times 21 = 441$ façons de le faire.

Au final, il y a $210 + 441 = 651$ mains avec exactement un as et un coeur.

(3) On remarque qu'il y a $2n$ feuilles dans le bac (n originales et n copies).
(a) Pour former une paire il faut choisir deux feuilles parmi $2n$, il y a
$$\binom{2n}{2} = \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1)$$
façons de le faire.
(b) Il y a naturellement n paires de feuilles composées d'une originale et de sa copie.

Exercice 2. Soient E un ensemble et A une partie de E telle que $A \notin \{\emptyset; E\}$. On définit l'application f_A par
$$f_A : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \{0;1\} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{array} \right. \end{array}$$

(1) Comme par hypothèse, $A \neq E$, il existe un élément qui n'est pas dans A, c'est à dire $x \notin A$. Cet élément vérifie alors $f_A(x) = 0$. Comme A est non vide, il est composé au moins d'un élément, notons-le a. L'image de cet élément par f_A est alors $f_A(a) = 1$. Ainsi, les deux valeurs à l'arrivée sont atteintes et f_A est surjective.

Pour l'injectivité, on voit que si deux éléments sont dans A, ils seront tous deux envoyés sur 1 donc *a priori* l'application ne sera pas injective, sauf si A n'est constitué que d'un seul éléments et que $\overline{A}$ aussi. N'étant pas injective, elle ne peux pas être bijective.

(2) Par définition de f_A, on a
$$1 - f_A(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{si } x \in A \\ 1, & \text{si } x \notin A \end{array} \right. ,$$
ce qui correspond bien à la définition de $f_{\overline{A}}$.

(3) On constate que, si un élément x n'est pas dans A alors $f_A(x) = 0$ donc $f_A(x)f_B(x) = 0$. Même chose si cet élément n'est pas dans B. Or, $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$. Mais alors, si $x \in A \cap B$, alors $f_A(x) = f_B(x) = 1$ et donc $f_A(x)f_B(x) = 1$. On en déduit que $f_A f_B = f_{A\cap B}$.

Exercice 3. Un livre comporte 14 chapitres. Un étudiant paresseux décide de n'en lire que 3.

(1) Il s'agit du nombre de combinaison de 3 éléments dans un ensemble qui en contient 14 et par définition, ce nombre est
$$\binom{14}{3} = \frac{14!}{3!11!} = \frac{14 \times 13 \times 12}{6} = 14 \times 13 \times 2 = 364.$$

(2) Soit $k \in \{3, 4, 5, ..., 14\}$ fixé. Si k est le plus grand des trois numéros, les deux autres numéros sont choisis dans les $k - 1$ numéros inférieurs à k. Il y a $\binom{k-1}{2}$ façons de les choisir.

(3) On partitionne l'ensemble des choix de trois chapitres selon le numéro du chapitre avec le numéro le plus grand. Plus précisément, si E représente l'ensemble de tous les choix possibles et E_k l'ensemble des choix de trois chapitres avec k pour plus grand numéro de chapitre, on a
$$E = \bigcup_{k=3}^{14} E_k.$$
Mais par définition des ensembles E_k, il est clair que ceux-ci sont deux à deux disjoints et par conséquent le cardinal de leur réunion s'obtient comme somme des cardinaux. On a donc
$$\binom{14}{3} = \#E = \sum_{k=3}^{14} \#E_k = \sum_{k=3}^{14} \binom{k-1}{2}.$$
Le changement d'indice $j = k - 1$ donne alors
$$\binom{14}{3} = \sum_{j=2}^{13} \binom{j}{2}.$$

(4) On pourrait montrer la formule voulue par un nouvel argument de dénombrement. Malheureusement (ou pas, question de point de vue), on nous demande une démonstration par récurrence. Il faut faire un peu attention ici car il y a deux indices n et p. Il faut savoir faire cette question classique (qu'on a pu retrouver par exemple dans le sujet **ECRICOME 2017**). On a pas peur et on y va.

- Initialisation. Si $n = 1$, le seul choix possible de p est alors $p = 1$ également. On a d'une part, $\binom{n+1}{p+1} = \binom{2}{2} = 1$ et d'autre part
$$\sum_{k=1}^{1} \binom{k}{p} = \binom{1}{1} = 1.$$
C'est bien égal et la propriété est initialisée.

- Hérédité. Supposons que pour un certain $n \geq 1$ et pour tout p entre 1 et n, on ait
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{p}{k} = \binom{n+1}{p+1}.$$
On veut montrer que
$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{p}{k} = \binom{n+2}{p+1}.$$
Pour passer à la propriété au rang $n + 1$, il faut distinguer deux cas: p entre 1 et n et $p = n + 1$.

– Si $p = n+1$, alors on veut montrer que

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \binom{n+2}{p+1}.$$

Mais dans ce cas, $p+1 = n+2$ et donc le membre de droite de l'égalité précédente vaut 1. Il n'y a qu'un seul terme dans la somme du membre de gauche qui vaut $\binom{n+1}{n+1} = 1$ et la formule est bien vérifiée (sans faire appel à l'hypothèse de récurrence).

– Si p est entre 1 et n, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} \\
&= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} \qquad \text{(par HR)} \\
&= \binom{n+2}{p+1} \qquad \text{(par le triangle de Pascal)},
\end{aligned}$$

ce qui es bien la formule attendue et termine la récurrence.