Interro (encore un peu Express) n°3

Solution

Exercice 1. On étudie le caractère $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ de chacune des fonctions ci dessous

$$f(t) = \begin{cases} t^2\ln(t) - t, & \text{si } t \neq 0 \\ 0, & \text{si } t = 0 \end{cases}, \qquad g(t) = \begin{cases} t\ln(t) - t^2, & \text{si } t \neq 0 \\ 0, & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Il est clair que chacune de ces deux fonctions est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme combinaison de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle; le problème vient du raccordement en 0. Par croissance comparée

$$\lim_{t\to 0} t^2\ln(t) = \lim_{t\to 0} t\ln(t) = 0$$

et les deux fonctions sont bien continues en 0. Pour la dérivabilité par contre, cela ne se passe pas aussi bien pour nos deux amies. En effet,

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2\ln(t)-t}{t} = \lim_{t\to 0} t\ln(t) - 1 = -1$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -1$. On va vérifier que la dérivée est continue, pour cela il faut la calculer. Si $t > 0$, on a

$$f'(t) = 2t\ln(t) - 1 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -1 = f'(0)$$

et f' est continue en 0 donc f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$. Concernant l'autre fonction,

$$\frac{g(t)-g(0)}{t} = \frac{t\ln(t)-t^2}{t} = \ln(t) - t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -\infty$$

et donc g n'est pas dérivable en 0 (et *a fortiori* par $\mathcal{C}^1$); sa courbe admet une tangente verticale en 0.

Exercice 2. Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}.$$

(1) Les fonction $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^x + 1$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulent jamais. Ainsi, la fonction f, définie comme leur quotient, a également la même régularité. Ce n'est pas demandé, mais cela permet de justifier qu'on peut dériver plusieurs fois en toute légalité, et qu'on est bien content. On n'attend d'ailleurs pas plus pour écrire que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(1+e^x)-(e^x)^2}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

et implique donc la stricte croissance de f sur $\mathbb{R}$. Comme l'exponentielle tend vers 0 en $-\infty$, et qu'on factorise par e^x au numérateur et au dénominateur pour déterminer la limite en $+\infty$, on peut écrire sans peine que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1,$$

et le tableau de variations (qui fait toujours plaisir) est le suivant:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	1

(2) Comme $f(0) = 1/2 > 0$ et que f est croissante, on a bien $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ ou encore $f([0;+\infty[) \subset [0;+\infty[$.

(3) On dérive f' afin d'obtenir la dérivée seconde de f (et de connaître les variations de f')

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{e^x(1+e^x)^2 - 2e^x(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x - e^{2x}}{(1+e^x)^3} \\ &= \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}, \end{aligned}$$

expression dont le signe est donné par celui de $1 - e^x$ qu'on sait parfaitement déterminer. La dérivée seconde nous permet, grâce à son signe, de voir que f' est décroissante sur $[0;+\infty[$. Ainsi, son maximum est donc atteint en $x = 0$. Il suit que, pour tout $x \geq 0$,

$$f'(x) \leq f'(0) = \frac{1}{2},$$

et on a bien l'inégalité demandée. On remarque que, comme $f'(x) > 0$, on a en fait

$$\forall x \geq 0, \qquad |f'(x)| \leq \frac{1}{4}.$$

(4) La fonction $g : \; x \mapsto e^x(1-x) - x$ est définie et $\mathcal{C}^\infty$, donc dérivable, sur $\mathbb{R}$ (et *a fortiori* sur $[0;+\infty[$) comme produit de telles fonctions et on a $g'(x) = -xe^x - 1 = -(xe^x + 1) < 0$, pour $x \geq 0$.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
g	1	$\searrow$	$-\infty$

Par le théorème de bijection, la stricte décroissance de g combinée au fait que celle-ci est continue entraînent que g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $]-\infty;1]$. En particulier, 0 admet un unique antécédent α sur $[0;+\infty[$. Comme, de plus, $g(0) = 1 > 0$ et $g(1) = -1 > 0$, on a $0 < \alpha < 1$.

(5) Il est très facile de reformuler l'équation (E):

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff e^x = x(1+e^x) \iff e^x(1-x) = x \\ &\iff e^x(1-x) - x = 0. \end{aligned}$$

Il suit que les points fixes de f sont les antécédents de 0 par g: il n'y en a donc un seul, α.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, et $u_{n+1} = f(u_n)$.

(6) C'est une récurrence immédiate. En effet, $u_0 = 0$ ce qui initialise la propriété. Si $u_n \geq 0$ pour un certain n, la stabilité de $\mathbb{R}_+$ par l'action de f démontrée précédemment donne immédiatement $u_{n+1} = f(u_n) \geq 0$.

(7) Sans surprise, on utilise l'IAF appliqué à f (qui est bien $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}_+$ dont tous les termes de la suite et α sont des éléments. Comme $f(\alpha) = \alpha$ et que $|f'(x)| \leq 1/4$ pour tout $x \geq 0$, on a

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|.$$

(8) C'est une récurrence facile et classique. Pour $n = 0$, on a

$$|u_0 - \alpha| = |\alpha| = \alpha \leq 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^0,$$

et la propriété est bien initialisée. Supposons qu'elle soit vraie pour un certain entier $n \geq 0$. Alors,

$$\begin{array}{rcll} |u_{n+1} - \alpha| & \leq & \frac{1}{4}|u_n - \alpha| & \text{(par la question précédente)} \\ & \leq & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n & \text{(par HR)} \\ & \leq & \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}, & \end{array}$$

ce qui termine bien la récurrence. Par application du théorème des gendarmes, comme $|1/4| < 1$, on a $(1/4)^n$ qui tend vers 0 et donc $u_n - \alpha$ tend vers 0 ou encore u_n tend vers α, ce qui est la conclusion souhaitée.

Exercice 3. Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$$f_n(x) = x - n\ln(x).$$

(1) La fonction f_n est (continue et) dérivable sur son ensemble de définition, comme somme de deux fonctions dérivables. On a de plus, pour $x > 0$,

$$f_n'(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x}.$$

Il est alors très facile de dresser le tableau de variations de f_n:

x	0		n		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f_n	‖ $+\infty$	↘	$n - n\ln(n)$	↗	$+\infty$

Comme $n \geq 3$, $\ln(n) > 1$ et donc $n - n\ln(n) < 0$. Il suit que, f_n étant continue, le théorème de bijection et les variations précédentes permettent d'affirmer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions; une dans $]0; n[$ et l'autre dans $]n; +\infty[$. En les notant u_n et v_n, on a bien

$$0 < u_n < n < v_n.$$

(2) (a) Il suffit de comparer les images par f_n de 1, de u_n et de e. On a

$$f_n(1) = 1 > 0 = f_n(u_n) > e - n = f_n(e)$$

et f_n étant décroissante sur $]0; n[$, on a bien l'encadrement demandé.

(b) On voit que

$$\begin{array}{rcl} f_n(u_{n+1}) & = & u_{n+1} - n\ln(u_{n+1}) = u_{n+1} - (n+1)\ln(u_{n+1}) + \ln(u_{n+1}) \\ & = & f_{n+1}(u_{n+1}) + \ln(u_{n+1}) \\ & = & \ln(u_{n+1}), \end{array}$$

ce qu'on voulait. Or comme $1 < u_{n+1}$, il suit que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1}) > 0$ et donc $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$ mais la fonction f_n étant décroissante, on en déduit que

$$u_{n+1} < u_n$$

et que (u_n) est décroissante.

(c) Par le théorème de convergence monotone, (u_n) converge (elle est décroissante et minorée par 1). On note ℓ sa limite. L'encadrement établi pour les termes de (u_n) permet d'obtenir $1 \leq \ell \leq e$. Si $\ell > 1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln(u_n) = +\infty \quad \text{et donc} \quad 0 = \lim_{n\to+\infty} f_n(u_n) = -\infty,$$

ce qui est absurde. Ainsi, on a $\ell = 1$.

(3) Par comparaison, comme $v_n > n$, on a immédiatement que $v_n \longrightarrow +\infty$, $n \to +\infty$.