ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Interro (lentement mais sûrement #lièvre #tortue) n°4

Durée: 1h30

Exercice 1. (Où l'on montre que l'on connait bien son cours)

(1) Montrer la convergence et calculer la somme des séries ci-dessous
$$(i)\ \sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)^2(-2)^{n+2}}{5^n}, \qquad (ii)\ \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{\sqrt{n+3}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

(2) Soit (u_n) une suite de termes positifs telle que, pour tout $n\geq 1$, $u_n\geq 1/n$. Que peut-on dire quant à la convergence de la série $\sum u_n$?

(3) Montrer que l'application $p:\ n\mapsto (n-1)/n!$ définit bien une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

(4) Énoncer **soigneusement** les définitions du noyau et de l'image d'une application linéaire. Caractériser l'injectivité et la surjectivité de l'application linéaire à l'aide de ces deux sous-espaces. Énoncer le théorème du rang. Que se passe-t-il lorsque f est un endomorphisme?

(5) Un voyageur prend l'avion. À chaque voyage, la probabilité que sa valise soit retardée est de $1/12$ et les incidents de bagages sont indépendants à chaque vol. Montrer **soigneusement** que, presque sûrement, ce voyageur subira un retard de valise lors d'une répétition infinie de trajets en avion.

(6) On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est
$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$
Sans aucun calcul, déterminer l'image et le noyau de f. La matrice est-elle inversible?

Exercice 2. (`SciLab` : Les soirées du vendredi soir) Un groupe d'étudiants ne sait pas comment occuper ses soirées du vendredi. L'un d'entre eux propose un jeu consistant à retourner les cartes au hasard (avec remise) d'un jeu de 32 et, selon le tirage obtenu, effectuer l'une ou l'autre des actions suivantes:

- Si l'on retourne un 7, on remet la carte, on mélange et on retire;
- Si l'on retourne un 8 ou un 9, on doit faire 35 pompes;
- Si l'on retourne un 10, un valet ou une dame, on doit faire (une partie de) la vaisselle accumulée dans l'évier depuis des mois;
- Si l'on retourne un roi, on s'attaque au DM de maths distribué la veille;
- Si l'on retourne l'as de coeur, on doit écouter en intégralité une chanson de Maître Gims sans avoir le droit d'interrompre le supplice.
- Si l'on retourne un autre as, on file se coucher.

Après s'être rendu compte que le groupe ne disposait d'aucun jeu de cartes, l'un d'entre eux se propose d'écrire une version du jeu sous `SciLab`.

(1) Préciser les probabilités respectives de chacune des alternatives du jeu.
(2) Compléter le programme ci-dessous pour garantir une bien belle soirée.

```
function []=soirée_vendredi()
    r=...............
    while ................
        r=.................
    end
    if ............... then
         disp('Pompes')
    else
        if ............. then
            disp('Vaisselle')
        else
            if ........... then
                disp('DM')
            else
                if .............. then
                    disp('Supplice')
                else
                    .....................
                end
            end
        end
    end
endfunction
```

Exercice 3. On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \qquad f(e_2) = 3e_2, \qquad f(e_3) = 4e_1 - 4e_3.$$

On introduit aussi l'endomorphisme g dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) **Étude de f**
  (a) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.
  (b) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.
  (c) Même question avec $\mathrm{Im}(f)$.
  (d) L'application est-elle injective? Surjective? Bijective? La matrice A est-elle inversible?
  (e) Montrer que le sous-espace H défini par $H = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = -6u\}$ est de dimension 1. Expliciter un vecteur w qui engendre H.
  (f) Montrer que la famille $\mathcal{F} = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, où

$$\epsilon_1 = 2e_1 + e_3, \qquad \epsilon_2 = e_2, \qquad \epsilon_3 = w.$$

  (g) Déterminer la matrice B de f dans la base $\mathcal{F}$.

(2) **Étude de g**
  (a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(g)$ et une base de $\mathrm{Im}(g)$.
  (b) Montrer que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
  (c) En déduire, sans calcul, M^n pour $n \geq 2$.