ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Interro (lentement mais sûrement #lièvre #tortue) n°4

Solution

Exercice 1. (Où l'on montre que l'on connait bien son cours)

(1) On montre la convergence en travaillant sur le terme général ou directement sur la suite des sommes partielles:

$$(i)\ \frac{(n+1)^2(-2)^{n+2}}{5^n} = 4(n^2+2n+1)\left(\frac{-2}{5}\right)^n$$
$$= 4(n(n-1)+3n+1)\left(\frac{-2}{5}\right)^n$$
$$= \frac{16}{25}n(n-1)\left(\frac{-2}{5}\right)^{n-2} + \frac{(-24)}{5}n\left(\frac{-2}{5}\right)^{n-1} + 4\left(\frac{-2}{5}\right)^n$$

et on reconnait une combinaison de séries géométriques (dérivées) de raison $(-2/5)$ donc convergentes. Ainsi, notre série converge et sa somme est égale à la combinaison des sommes des séries susmentionnées. On obtient donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)^2(-2)^{n+2}}{5^n} = \frac{16}{25}\times\frac{2}{\left(1+\frac{2}{5}\right)^3} - \frac{24}{5}\times\frac{1}{\left(1+\frac{2}{5}\right)^2} + 4\times\frac{1}{1+\frac{2}{5}}$$
$$= \frac{16}{25}\times\frac{2\times 5^3}{7^3} - \frac{24}{5}\times\frac{5^2}{7^2} + 4\times\frac{5}{7}$$
$$= \frac{160-840+980}{7^3}$$
$$= \frac{300}{7^3}.$$

$$(ii)\ \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Ici, on calcule explicitement la somme partielle, comme somme télescopique, et on passe à la limite.

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k+3}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+3}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$
$$= \sum_{j=4}^{n+3}\frac{1}{\sqrt{j}} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

La série est donc convergente et

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k+3}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=-\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

(2) On sait que la série harmonique $\sum_{n\geq 1} 1/n$ est une série de Riemann divergente. Ainsi, par critère de comparaison des séries à termes positifs, on peut conclure que la série $\sum u_n$ diverge.

(3) On vérifie que l'application $p: n \mapsto (n-1)/n!$ définit bien une probabilité sur $\mathbb{N}^*$:

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq \frac{(n-1)}{n!} \leq 1, \qquad \text{car} \qquad n-1 \leq n!$$

- Comme

$$\frac{(n-1)}{n!}=\frac{n}{n!}-\frac{1}{n!}=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!},$$

et on reconnait une combinaison de séries exponentielles (décalées) de paramètre 1. On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n-1)}{n!} &= \sum_{n=1}\frac{1}{(n-1)!}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}+\frac{1}{0!}\\ &= 1,\end{aligned}$$

ce qu'on attendait.

Ainsi, on a bien une distribution de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

(4) Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire. Le noyau de f est le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ formé des vecteurs dont l'image par f est le vecteur nul de $\mathbb{R}^p$, autrement dit, il s'agit des antécédents du vecteur nul de $\mathbb{R}^p$

$$\mathrm{Ker}(f)=\{u\in\mathbb{R}^n:\ f(u)=0_{\mathbb{R}^p}\}=f^{-1}\left(\{0_{\mathbb{R}^p}\}\right).$$

L'image de f est le sous-espace de $\mathbb{R}^p$ composé des vecteurs qui admettent (au moins) un antécédent par f, c'est l'image directe de $\mathbb{R}^n$ par f

$$\mathrm{Im}(f)=\{v\in\mathbb{R}^p:\ \exists u\in\mathbb{R}^n,\ f(u)=v\}=f(\mathbb{R}^n).$$

Par définition de la surjectivité, il est clair que

$$f \quad \text{surjective} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^p.$$

La linéarité de f permet de ramener l'injectivité de f à la réduction du noyau au vecteur nul

$$f \quad \text{injective} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(f)=\{0_{\mathbb{R}^n}\}.$$

Le **théorème du rang** relie les dimensions de ces sous-espaces:

$$\dim(\mathrm{Ker}(f))+\dim(\mathrm{Im}(f))=n.$$

Ainsi, si f est un endomorphisme, c'est à dire si f est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, une conséquence immédiate du théorème du rang est la chaîne d'équivalences suivantes

$$f \text{ injective} \Longleftrightarrow f \quad \text{surjective} \quad \Longleftrightarrow f \text{ bijective}.$$

(5) On choisit de raisonner ici à l'aide du théorème de la limite monotone. On aurait pu faire autrement et on renvoie aux séances de soutien pour des versions alternatives de la solution.

On introduit les évènements E_n "après n vol, le voyageur n'a jamais subi d'incident bagage". Il est clair que la suite (E_n) est décroissante au sens de l'inclusion (si les $n+1$ premiers voyages n'ont pas entraîné de retard de valises, les n premières non plus *a fortiori*). L'évènement E "Le voyageur ne subit jamais de retard de valise au cours de tous ses voyages" s'écrit comme intersection ses évènements précédents

$$E = \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n.$$

Les incidents au cours des trajets étant indépendants (comme énoncé), il est clair que

$$P(E_n) = \left(1 - \frac{1}{12}\right)^n.$$

Par le théorème de limite monotone, on a

$$P(E) = \lim_{n\to+\infty} P(E_n) = 0,$$

car $0 < 1 - 1/12 < 1$. Ainsi, presque sûrement $\overline{E}$ a lieu, ou encore le voyageur doit attendre sa valise.

(6) On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On sait que l'image de f est engendrée par les vecteurs dont les composantes sont les colonnes de A. Comme il y a une colonne nulle, on a

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Les deux vecteurs ci-dessus étant clairement non colinéaires, ils forment une famille libre qui engendre l'image de f et en forment donc une base, ce qui permet d'affirmer que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$. Par le théorème du rang, on sait alors que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$, mais comme la seconde colonne de A est nulle, on sait que $f(e_2) = 0$, où e_2 est le second vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Comme $e_2 \in \mathrm{Ker}(f)$ qui est de dimension 1, e_2 engendre le noyau et en forme une base, ainsi

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Le noyau n'étant pas réduit au vecteur nul, l'application n'est pas inejctive et *a foriori* pas bijective non plus, donc la matrice A n'est pas inversible.

Exercice 2. (`SciLab` : Les soirées du vendredi soir) Un groupe d'étudiants ne sait pas comment occuper ses soirées du vendredi. L'un d'entre eux propose un jeu consistant à retourner les cartes au hasard (avec remise) d'un jeu de 32 et, selon le tirage obtenu, effectuer l'une ou l'autre des actions suivantes:

- Si l'on retourne un 7, on remet la carte, on mélange et on retire;
- Si l'on retourne un 8 ou un 9, on doit faire 35 pompes;
- Si l'on retourne un 10, un valet ou une dame, on doit faire (une partie de) la vaisselle accumulée dans l'évier depuis des mois;
- Si l'on retourne un roi, on s'attaque au DM de maths distribué la veille;

- Si l'on retourne l'as de coeur, on doit écouter en intégralité une chanson de Maître Gims sans avoir le droit d'interrompre le supplice.
- Si l'on retourne un autre as, on file se coucher.

Après s'être rendu compte que le groupe ne disposait d'aucun jeu de cartes, l'un d'entre eux se propose d'écrire une version du jeu sous `SciLab`.

(1)
- Il y a 4 cartes numérotées 7 dans le jeu, soit une probabilité $4/32 = 1/8$ d'en tirer une et d'avoir à retirer.
- Il y a 8 cartes numérotées 8 ou 9 dans le jeu, soit une probabilité $8/32 = 1/4$ de devoir faire des pompes.
- Il y a 12 telles cartes dont une probabilité $12/32 = 3/8$ de faire la vaisselle.
- Avec une probabilité de $1/8$, on commence le DM de maths.
- Il n'y a qu'un as de coeur, dont la probabilité d'apparition est de $1/32$ qui nécessite d'écouter *Sapés comme jamais*.
- Il y a 3 autres as, donc une probabilité $3/32$ d'aller se coucher.

(2) Compléter le programme ci-dessous pour garantir une bien belle soirée.

```
function []=soirée_vendredi()
    r=rand()
    while r <= 1/8 //tant qu'on tire un 7
        r=rand();  //on mélange et on retire
    end
    if  r<= 3/8 then //car 1/8 + 1/4 = 3/8
         disp('Pompes')
    else
        if r<= 3/4 then //car 3/8 + 3/8 = 6/8=3/4
            disp('Vaisselle')
        else
            if r<= 7/8 then //car 6/8 + 1/8 = 7/8
                disp('DM')
            else
                if r<= 29/32 then //car 7/8 + 1/32 = 29/32
                    disp('Supplice')
                else
                    disp('Dodo')
                end
            end
        end
    end
endfunction
```

Exercice 3. On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \qquad f(e_2) = 3e_2, \qquad f(e_3) = 4e_1 - 4e_3.$$

On introduit aussi l'endomorphisme g dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) **Étude de f**

(a) D'après la définition de f par son action sur la base canonique, on peut écrire

$$A = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

(b) Pour déterminer $\mathrm{Ker}(f)$, on résout l'équation correspondante:

$$\begin{aligned}
u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f) &\iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x + 4z &=& 0 \\ 3y &=& 0 \\ 2x - 4z &=& 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 2z \\ y &=& 0 \end{array} \right. \\
&\iff u = \begin{pmatrix} 2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a trouvé un vecteur qui engendrait le noyau et qui en forme donc une base. On peut conclure que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ et

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) L'image de f est engendrée par les colonnes. On sait déjà, par le théorème du rang qu'elle sera de dimension 2 et on voit que la première et la troisième colonne sont colinéaires, en revanche les deux premières ne le sont pas. On en conclut donc que les deux premières colonnes de A forment une base de l'image. On peut même les remplacer par des multiples un peu plus pratiques si on veut - ça fait plus joli -

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(d) Le noyau n'est pas réduit au vecteur nul, l'image ne remplit pas tout l'espace, bref, l'application n'est ni injective, ni surjective (ce qui notons le est de toute façon ici équivalent) et la matrice n'est pas inversible.

(e) Pour déterminer la dimension d'un sous-espace, il faut en exhiber une base. Pour cela, il faut résoudre l'équation qui définit le sous-espace. Ce n'est pas si difficile

$$\begin{aligned}
w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in H \quad &\iff \quad f(w) = -6w \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6x \\ -6y \\ -6z \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x + 4z &=& -6x \\ 3y &=& -6y \\ 2x - 4z &=& -6z \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 4x + 4z &=& 0 \\ y &=& 0 \\ 2x + 2z &=& 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} z &=& -x \\ y &=& 0 \end{array} \right. \\
&\iff w = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En prenant $w = e_1 - e_3$, on a bien un vecteur qui engendre H (et en forme donc une base) qui est bien de dimension 1.

(f) Pour montrer que la famille $\mathcal{F} = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$, qui est composée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ en forme une base, il suffit de montrer qu'elle forme une famille libre. Soient donc $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha\epsilon_1 + \beta\epsilon_2 + \gamma\epsilon_3 = 0 \qquad\qquad (\star).$$

D'après la définition des trois vecteurs, on peut écrire

$$\begin{aligned}
(\star) \quad &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2\alpha + \gamma &=& 0 \\ \beta &=& 0 \\ \alpha - \gamma &=& 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2\alpha + \gamma &=& 0 \\ \beta &=& 0 \\ 3\gamma &=& 0 \end{array} \right. \\
&\iff \alpha = \beta = \gamma = 0
\end{aligned}$$

La famille est bien libre et forme une base de $\mathbb{R}^3$.

(g) En regardant comment sont choisis les vecteurs, on voit que
- $\epsilon_1 = 2e_1 + e_3 \in \mathrm{Ker}(f)$ ce qui donne donc $f(\epsilon_1) = 0$.
- $f(\epsilon_2) = f(e_2) = 3e_2$.
- $\epsilon_3 = w \in H$ et donc $f(\epsilon_3) = -6\epsilon_3$

Ces observations permettent d'écrire la matrice de f dans la nouvelle base

$$B = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

(2) **Étude de g**

(a) C'est encore la même méthode que précédemment

$$\begin{aligned}
u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(g) \quad &\Longleftrightarrow \quad M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x + y - z &=& 0 \\ -3x - 3y + 3z &=& 0 \\ -2x - 2y + 2z &=& 0 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \quad x = -y + z \\
&\Longleftrightarrow \quad u = \begin{pmatrix} -y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On vient de trouver deux vecteurs non colinéaires qui engendrent le noyau de g, ils en forment donc une base, et on sait alors que le noyau de g est de dimension 2 et on écrit

$$\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Par le théorème du rang, l'image de sera de dimension 1 (ce qu'on peut aussi voir immédiatement en regardant les colonnes de M) et on en choisit une pour former une base

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Soit $v \in \mathrm{Im}(g)$. Par ce qu'on vient d'écrire, on sait que $v = \lambda u$, où $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Alors,

$$g(v) = \lambda M \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot 0 = 0$$

Comme $g(v) = 0$, on en conclut que $v \in \mathrm{Ker}(g)$. On a donc bien l'inclusion demandée.

(c) Soit $u \in \mathbb{R}^3$ un vecteur quelconque. Observons que $g^2(u) = g(g(u))$. Or, $g(u)$ est, par définition, un vecteur de l'image de g qui, par la question précédente se trouve être dans le noyau. En lui appliquant à nouveau g on tombe donc sur 0. Ainsi, $g^2(u) = 0$, ceci étant vrai pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, on en conclut que $g^2 = 0$. Mais la matrice de g^2 est M^2 et cette matrice ne peut qu'être nulle, donc $M^2 = 0$. Par une récurrence immédiate, il suit que $M^n = 0$, pour tout $n \geq 2$.