ECE 1 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Interro carrément express n°5

Durée: 15 minutes

Exercice 1.

(1) On reconnait des primitives

$$(i)\quad \int_0^1 \left(2x^3 - 3x + \frac{2}{x+1}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 + 2\ln(x+1)\right]_0^1 = 2\ln(2) - 1$$

$$(ii)\quad \int_{-2}^2 x^3 \exp\left(-x^2\right) \mathrm{d}x = 0 \qquad \text{(car la fonction } x \mapsto x^3 \exp\left(-x^2\right) \text{ est impaire)}$$

$$(iii)\quad \int_0^4 \frac{xt}{\sqrt{t^2+9}} \mathrm{d}t = x\left[\sqrt{t^2+9}\right]_0^4 = 2x.$$

(2) Remarquant que $e^x e^{-x} = 1$, on a

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{\mathrm{d}x}{1+e^{-x}} = \int_0^{\ln(2)} \frac{\mathrm{d}x}{e^{-x}(e^x+1)} = \int_0^{\ln(2)} \frac{e^x}{e^x+1} \mathrm{d}x = \left[\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^{\ln(2)} = \ln(3) - \ln(2).$$

Exercice 2. On voit que

$$\int_1^n \frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} \mathrm{d}x = -\int_1^n \left(-\frac{1}{x^2}\right) \exp\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{d}x = -\left[\exp\left(\frac{1}{x}\right)\right]_1^n = e - \exp\left(\frac{1}{n}\right)$$

et il suit clairement que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} \mathrm{d}x = e - 1.$$

Exercice 3. Comme, pour tout $t \geq 0$, $e^{-t} \leq 1$, on a, pour tout $t \in [0;1]$,

$$0 \leq \frac{e^{-t}}{1+t} \leq \frac{1}{1+t}.$$

Par positivité de l'intégrale,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+t} \mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \left[\ln(1+t)\right]_0^1 = \ln(2).$$