ECE 2 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Séances de Révisions

(*) Facile (**) Classique/intermédiaire (***) Difficile

Séance 1. Suites récurrentes & implicites

Exercice 1. (*) Montrer que la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = (u_n^2 + 1)/2$ possède des termes tous compris entre 0 et 1. Montrer que la suite converge et déterminer sa limite.

Exercice 2. (*) Montrer que l'équation $x^{3n} + n^n x^n - 1 = 0$ admet une unique solution strictement positive, notée a_n. Montrer que $a_n < 1/n$ et en déduire la limite de la suite (a_n).

Exercice 3. (**) Soit $f : [a;b] \to [a;b]$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f est *contractante*, c'est à dire qu'il existe $q \in]0;1[$ tel que, pour tout $x \in [a;b]$, $|f'(x)| \leq q$.

(1) Montrer que f admet un unique point fixe α.
(2) On introduit la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in [a;b], \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

 (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [a;b]$.
 (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leq q^n(b-a).$$

 (c) Conclure quant à la convergence de la suite. En déduire l'écriture d'un programme `SciLab` permettant de donner une valeur approchée de α à ε près, où ε est rentré par l'utilisateur.

Exercice 4. (*) On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ et on note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal. On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = \frac{1}{2}, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

Partie 1 - Étude de la fonction f

(1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
(2) Étudier f, préciser les limites aux bornes, puis dresser son tableau de variations.
(3) Montrer en particulier que $\mathcal{C}$ admet une asymptote Δ en $+\infty$, dont on donnera l'équation.
 (a) Exprimer $f'(x)$ en fonction de x et de $f(x)$.

(b) Montrer que
$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad f(x) \geq \sqrt{\frac{3}{4}}.$$
(c) En déduire que
$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$
(4) Montrer, en utilisant la Question 4(b), que :
$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \quad f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Partie 2 - Convergence de la suite (u_n)

(1) Montrer par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$
(2) Démontrer que que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} |u_n - 1|.$$
(3) Montrer par récurrence que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^n |u_0 - 1|$$
(4) En déduire soigneusement que la suite (u_n) converge vers une limite à préciser.

Exercice 5. (**D'après **ESC 2001**) On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 2xe^x$.

(1) Montrer que f réalise une bijection de $[0;1]$ sur un ensemble que l'on déterminera. On note f^{-1} sa bijection réciproque. Donner les tableaux de variations de f et de f^{-1}.
(2) Vérifier qu'il existe un unique nombre $\alpha \in [0;1]$ tel que $\alpha e^\alpha = 1$. Montrer que $\alpha \neq 0$.
(3) Montrer, par récurrence, que la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 & = & \alpha \\ u_{n+1} & = & f^{-1}(u_n), \qquad n \geq 0. \end{cases}$$
est bien définie (*i.e.* que u_n existe pour tout entier n) et que $u_n \in]0;1]$.
(4) Montrer que, pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) - x \geq 0$ et que l'égalité ne se produit que pour $x = 0$.
(5) En déduire la monotonie de la suite (u_n), puis qu'elle converge. On précisera sa limite.
(6) On s'intéresse alors à la série de terme général u_n dont on note (S_n) la suite des sommes partielles.
(a) Montrer que, pour tout entier n,
$$u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n e^{-u_{n+1}}.$$
(b) En déduire, par récurrence, que pour tout entier n,
$$u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}.$$
(c) À l'aide du critère de comparaison, montrer que la série $\sum u_n$ converge. On note L sa somme. Montrer que $\alpha \leq L \leq 2$.

(d) Montrer finalement que

$$u_n \sim \frac{e^{-L}}{2^n}, \qquad n \to +\infty?$$

Exercice 6. (**D'après **EDHEC 2004**) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la formule ci-dessous et C_n sa courbe représentative.

$$f_n = \begin{cases} xe^{-n/x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Partie 1 - Étude des fonctions f_n

(1) Montrer que f_n est continue à droite en 0.
(2) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et donner la valeur de $(f_n)'_d(0)$.
(3) Montrer que f_n est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Pour tout réel x non nul, calculer $f'_n(x)$ puis étudier son signe.
(4) Calculer les limites de f_n en $+\infty$, $-\infty$ et 0^-, puis donner le tableau de variations de f_n.

(5) (a) Montrer que, lorsque x est au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage de $-\infty$, on a

$$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

(b) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, ainsi qu'au voisinage de $-\infty$, C_n admet une asymptote oblique D_n dont on donnera une équation. Préciser la position relative de D_n et C_n aux voisinages de $+\infty$ et de $-\infty$.
(c) Représenter l'allure de C_n. On représentera également la droite D_n ainsi que la demi-tangente à droite en 0.

Partie 2 - Un équivalent d'une suite implicite

(6) Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera u_n, tel que $f_n(u_n) = 1$.
(7) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n est strictement supérieur à 1 et que u_n est solution de l'équation

$$(E_n) \qquad x \ln(x) = n.$$

(8) Étudier la fonction g définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = x \ln(x)$. En déduire, en utilisant la fonction g^{-1} dont on justifiera l'existence, que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

(9) Justifier la relation $\ln(u_n) + \ln(\ln(u_n)) = \ln(n)$, puis montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(u_n)}{\ln(n)} = 1.$$

(10) En déduire que

$$u_n \sim \frac{n}{\ln(n)}, \quad n \to +\infty.$$

Exercice 7. (***D'après **ESCP 1996**).

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)\ln(x)}{2(x-1)}, & \text{si } x \neq 1 \\ \\ 1, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

(1) Montrer que f est une fonction continue sur $]0,+\infty[$.

(2) Calculer la dérivée f' de f sur les intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. Étudier son signe et en déduire que f est monotone sur chacun de ces deux intervalles.

(3) Montrer que pour tout x strictement positif et différent de 1, la dérivée f' de f vérifie:

$$f'(x)=\frac{(x-1)-\ln(x)}{(x-1)^2}-\frac{1}{2x}.$$

(4) À l'aide du développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 2 en 0, montrer que f est dérivable au point 1 et déterminer $f'(1)$. Montrer que f' est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

(5) Montrer que pour tout $x>1$, on a $\ln(x)<(x-1)$. En déduire que, pour tout $x>1$, $f(x)<x$.

(6) Donner le représentation graphique de la fonction f.

(7) Soit a un réel supérieur à 1.
   (a) Montrer que la suite (x_n) définie par $x_0=a$ et $x_{n+1}=f(x_n)$ est bien définie et vérifie, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_n\geq 1$.
   (b) Montrer que cette suite est décroissante et qu'elle admet une limite ℓ que l'on précisera.

(8) On se propose d'étudier la vitesse avec laquelle la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ tend vers ℓ.
   (a) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n\geq n_0$,

$$\left|f\left(x_n\right)-\ell\right|\leq\frac{1}{3}\left|x_n-\ell\right|.$$

   (b) En déduire que la suite $(x_n-\ell)_{n\geq 0}$ est négligeable devant la suite $(1/2)^n$.

Séance 2. Couples de VAD.

Exercice 8. (**) Calculer les sommes doubles suivantes

$$(i)\ \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i-j),\qquad (ii)\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{i}{j+n},\qquad (iii)\ \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{2^{i+j}}{i!j!}.$$

Exercice 9. (**) Soit (X,Y) un couple de v.a à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que, pour tous $(n,m)\in\mathbb{N}^2$,

$$P((X=n)\cap(Y=m))=\frac{\alpha}{(m+n+1)!}.$$

(1) Déterminer la valeur de la constante α.
(2) Déterminer les lois de X et Y (on fera apparaître une somme finie que l'on ne cherchera pas à calculer).
(3) X et Y sont-elles indépendantes?
(4) Déterminer la loi de $Z=X+Y$.

Exercice 10. (*) Soient X,Y deux variables aléatoires discrètes, indépendantes, de même loi. On note

$$\forall k\in\mathbb{N},\qquad P(X=k)=P(Y=k)=a_k.$$

(1) Que vaut $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$?
(2) Montrer que la série de terme général a_n^2 converge. On note a sa somme.
(3) Exprimer, en fonction de a, la probabilité $P(X=Y)$.

(4) **Application.** Quelle est la probabilité que coïncident deux v.a. de même loi $\mathcal{G}(p)$ indépendantes?

Exercice 11. (*) Soient X, Y deux v.a. indépendantes de même loi $\mathcal{G}(p)$. Montrer que $\min(X,Y) \hookrightarrow \mathcal{G}(1-(1-p)^2)$.

Exercice 12. (*D'après **ESC 2007**) Dans cette partie on suppose que le moteur subit chaque jour un contrôle de pollution afin de voir si le taux de gaz carbonique émis est réglementaire (Si c'est bien le cas on dira que le contrôle est positif).

On numérote ces contrôles à partir du jour numéro 1 et on les suppose indépendants.

À chacun de ces contrôles la probabilité d'être positif est $\frac{3}{5}$.

Au premier contrôle négatif, les réglages du moteur sont améliorés puis on le soumet le lendemain à une nouvelle séries de contrôles indépendants, à raison de un contrôle par jour.

À chacun de ces nouveaux contrôles la probabilité d'être positif est alors de $\frac{4}{5}$.

On note dans toute la suite X la variable aléatoire égale au numéro du jour du premier contrôle négatif et Y la variable aléatoire égale au numéro du jour du second contrôle négatif.

(1) Justifier que X suit une loi classique, qu'on détaillera, et donner son espérance et sa variance.

(2) (a) Que vaut $Y(\Omega)$?
(b) Déterminer la loi du couple (X,Y).
(c) Montrer que pour tout entier naturel $j \geq 2$,
$$P(Y=j) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^j - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^j.$$

Exercice 13. (**D'après **HEC 2010**) Soient p un réel de $]0,1[$ et $q = 1-p$. Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre p (d'espérance $1/p$).

On pose :
$$Y = X_1 - X_2, \quad T = \max(X_1, X_2), \quad \text{et} \quad Z = \min(X_1, X_2).$$
On rappelle que
$$T + Z = X_1 + X_2 \quad \text{et que} \quad T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|.$$

(8) (a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $V(X_1)$ et de $P([X_1 \leq k])$, pour tout k de $X_1(\Omega)$.
(b) Calculer $E(X_1+X_2)$, $V({}_1+X_2)$, $E(X_1-X_2)$, et $V(X_1-X_2)$.
(c) Établir la relation
$$P([X_1 = X_2]) = \frac{p}{1+q}.$$

(9) (a) Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1-q^2$. En déduire $E(Z)$, $V(Z)$ et $E(T)$.
(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité
$$[Z=k] \cup [T=k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k].$$
(c) En déduire la relation suivante
$$P(T=k) = 2P(X_1=k) - P(Z=k).$$

(d) Établir la formule :

$$V(T) = \frac{q(2q^2+q+2)}{(1-q^2)^2}.$$

(10) (a) Préciser $(T-Z)(\Omega)$. Exprimer, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, l'évènement $[Z=j] \cap [Z=T]$ en fonction des évènements $[X_1 = j]$ et $[X_2 = j]$. En déduire, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, l'expression de $P([Z=j] \cap [Z=T])$.

(b) Montrer que pour tout couple $(j,l) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a

$$P([Z=j] \cap [T-Z=l]) = 2p^2 q^{2j+l-2}.$$

(c) Montrer, en distinguant les trois cas $k=0$, $k>0$ et $k<0$, que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$P([X_1 - X_2 = k]) = \frac{pq^{|k|}}{1+q}.$$

(d) En déduire la loi de la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$.

(e) Établir à l'aide des questions précédentes que les variables Z et $T-Z$ sont indépendantes.

(11) (a) A l'aide du résultat de la Question 10.e, calculer $\operatorname{cov}(Z,T)$. Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?

(b) Calculer en fonction de q, le coefficient de corrélation linéaire ρ de Z et T.

(c) Déterminer la loi de probabilité du couple (Z,T).

(d) Déterminer pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, la loi de probabilité conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z=j]$.

(e) Soit $j \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j à valeur dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z=j]$. Calculer $E(D_j)$.

Exercice 14. (***) Soit $(X_1, ..., X_n)$ un $n-$uplet de v.a. finies.

(1) Rappeler la formule liant $V(X_1+X_2)$ et $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)$.

(2) Montrer, par récurrence sur n, que

$$V(X_1+X_2+...+X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{Cov}(X_i,X_j).$$

(3) Qu'obtient-on sur les variables sont mutuellement indépendantes?

Séance 3. Intégration et récurrences

Exercice 15. (***D'après **EDHEC 1998**) Monter, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^n}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

☞ *Indication.* On pourra poser

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^n}{k!}, \quad \text{et} \quad I_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t} \mathrm{d}t$$

et trouver une relation entre $I_{n+1}(x)$ et $I_n(x)$ par intégration par parties.

Exercice 16. (**D'après **HEC 2010**)

(1) Rappeler la valeur de $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la convergence de l'intégrale
$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t.$$
(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

Exercice 17. (**) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t.$$
(1) Montrer que (I_n) est décroissante.
(2) Montrer que, pour tout $u \in [0;1]$
$$0 \leq 1-u \leq e^{-u}.$$
(3) En déduire, à l'aide du changement de variables $x = \sqrt{n}u$ que
$$I_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$
(4) Montrer qu'il existe une constante $M \geq 0$ telle que
$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{n}} e^{-x}\mathrm{d}x \leq M.$$
(5) En déduire la limite de (I_n).
(6) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout $n \geq 1$,
$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$
(7) En déduire, par récurrence, que
$$I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Exercice 18. (***D'après **EML 2005**) On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout réel t, par :
$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{(1+t)^2}, & \text{si } t > 0 \end{cases}.$$
(1) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.
(2) Montrer que f est une densité de probabilité.
(3) Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale
$$\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t$$
converge, et calculer cette intégrale. *On distinguera les cas $x \leq 0$ et $x > 0$.*
(4) Déterminer un réel positif α tel que
$$\int_0^\alpha f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$
(5) Soit $x \in [0, +\infty[$ fixé.
On considère la fonction φ_x définie sur $[0; +\infty[$ par
$$\forall u \in [0, +\infty[, \qquad \varphi_x(u) = \int_{x-u}^{x+u} f(t)\mathrm{d}t.$$

(a) Calculer $\varphi_x(0)$ et $\lim_{u\to+\infty}\varphi_x(u)$.
(b) Montrer
$$\forall(u,v)\in([0,+\infty[)^2,\qquad (u<v)\implies\left(\varphi_x(v)-\varphi_x(u)\geq\int_{x+u}^{x+v}f(t)\mathrm{d}t\right).$$
En déduire que φ_x est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
(c) On admet que φ_x est continue sur $[0;+\infty[$. Montrer que l'équation $\varphi_x(u)=1/2$, d'inconnue u, admet une solution et une seule dans $[0;+\infty[$.

On note $U:[0;+\infty[\to\mathbb{R}$ l'application qui, à tout réel $x\in[0;+\infty[$, associe $U(x)$ l'unique solution de l'équation $\varphi_x(u)=\frac{1}{2}$.

Ainsi, pour tout $x\in[0;+\infty[$, on a
$$\int_{x-U(x)}^{x+U(x)}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}.$$

(6) (a) Vérifier, pour tout $x\in[0;1/2[$, $U(x)=1-x$.
(b) Pour tout $x\in[1/2;+\infty[$, montrer que
$$\varphi_x(x)\geq\frac{1}{2},$$
puis que $x-U(x)\geq 0$ En déduire alors que
$$U(x)=\sqrt{4+(x+1)^2}-2.$$

Séance 4. Recherche de valeurs propres

Exercice 19. (*) Déterminer les valeurs propres des matrices ci-dessous le plus rapidement possible. Sont-elles diagonalisables?

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix},\qquad D=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

$$F=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&1&3\end{pmatrix},\qquad G=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\qquad H=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Exercice 20. (*) On considère les matrices suivantes
$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&-1\\-2&-2&-1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}3&2&2\\-3&-2&-2\\1&1&0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}3&2&2\\-3&-2&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable?
(2) Déterminer une matrice P d'ordre 3, inversible, de deuxième ligne $\begin{pmatrix}-1&1&1\end{pmatrix}$ telle que $D=P^{-1}AP$ soit diagonale.
(3) Déterminer P^{-1}.
(4) Calculer $\Delta=P^{-1}BP$ et en déduire que B est diagonalisable.
(5) En déduire, sans calculs, que la matrice C est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.
(6) Les matrices A, B et C sont-elles inversibles?

Exercice 21. (*) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 puis diagonaliser A.

Exercice 22. (**)On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Justifier, **sans aucun calcul** que f est un automorphisme.
(2) Vérifier que $f \circ f \circ f \circ f = \mathrm{Id}$ (sans aucun calcul non plus) et en déduire l'expression de A^{-1} en fonction de A.
(3) 0 est-elle valeur propre? Montrer que si λ est valeur propre, alors $\lambda^4 = 1$.
(4) Déterminer $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $E_{-1} = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$. La matrice A est-elle diagonalisable?

Exercice 23. (**D'après **EDHEC 2015**) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) (a) Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, puis montrer que la famille $(e_2 + e_3 + e_4, e_1 + e_5)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
(b) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$, puis donner une base de $Ker(f)$.

(2) On note $u = e_2 + e_3 + e_4$ et $v = e_1 + e_5$.

(a) Écrire $f(u)$ et $f(v)$ comme combinaisons linéaires de e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, puis $f(u - v)$ et $f(u + 3v)$ comme combinaisons linéaires de u et v.
(b) En déduire les valeurs propres de f et préciser les sous-espaces propres associés.
(c) Établir que C est diagonalisable et déterminer une matrice D diagonale et une matrice R inversible telles que $C = RDR^{-1}$.