ECE 2 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Séances de Révisions

(*) Facile (**) Classique/intermédiaire (***) Difficile

Séances 7 & 8. Sujets ESSEC 1 & 2

Les exercices proposés reprennent des parties des sujets posés à l'ESSEC ces dernières années introduisant de nouvelles notions et pour lesquelles s'entraîner permet de développer sa capacité d'adaptation.

Exercice 1. (***Limite inférieure - D'après **ESSEC II 2015**)

Si a et b sont deux entiers tels que $a \leq b$. Pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de réels et I ensemble fini d'entiers naturels, on notera $\min_{i\in I}\ x_i$ le plus petit élément de l'ensemble $\{x_i, i \in I\}$. Par exemple,

$$\min_{i\in[\![1;9]\!]} \frac{1}{i} = \frac{1}{9}.$$

(1) Un exemple : déterminer $\displaystyle\min_{i\in[\![0;4]\!]} \frac{(-1)^i}{i+1}$.

(2) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs. Pour n entier naturel fixé, on pose pour tout k de $\mathbb{N}$,

$$u_n(k) = \min_{i\in[\![n;n+k]\!]} x_i.$$

(a) Montrer que la suite $(u_n(k))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
(b) En déduire que la suite $(u_n(k))_{k\geq 0}$ est convergente. On note

$$u_n = \lim_{k\to+\infty} u_n(k).$$

(c) Établir une inégalité entre les réels $u_{n+1}(k)$ et $u_n(k+1)$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
(d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ admet une limite (qui peut être $+\infty$).

Cette limite est dite **limite inférieure de la suite** $(x_n)_{n\geq 0}$ et est notée $\displaystyle\liminf_{n\to+\infty} x_n$.

(3) Soient les deux suites réelles positives $(y_n)_{n\geq 0}$ et $(z_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = 1 + (-1)^n, n \geq 0$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \begin{cases} 2, & \text{si } n \text{ est pair} \\ n, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

(a) Expliciter pour n positif ou nul et k supérieur ou égal à 1 les termes $u_n(k)$ associés à chacune des deux suites $(y_n)_{n\geq 0}$ et $(z_n)_{n\geq 0}$.
(b) Déterminer $\liminf_{n\to+\infty} y_n$ et $\liminf_{n\to+\infty} z_n$.

(4) (a) On suppose ici que $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de réels positifs. Comparer u_n et x_n et en déduire que si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge en croissant vers un réel ℓ, alors

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \ell.$$

(b) Montrer que si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de réels positifs, convergente vers un réel ℓ, alors

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \ell.$$

(c) (i) Soient $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ des réels donnés et soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout i tel que $1 \leq i \leq r$, α_i appartient à I. Montrer que

$$\min_{i\in[\![1;r]\!]} \alpha_i \in I.$$

(ii) Démontrer que si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de réels positifs convergente vers ℓ réel positif, on a

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \ell.$$

(5) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Pour x réel positif fixé, on définit la fonction φ_x sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall h \geq 0, \quad \varphi_x(h) = \min_{u\in[x,x+h]} f(u).$$

(a) Montrer que la fonction φ_x est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
(b) En déduire que $\varphi_x(h)$ a une limite dans $\mathbb{R}_+$ quand h tend vers $+\infty$. On note Φ_x cette limite.
(c) Montrer que $x \mapsto \Phi_x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
(d) En déduire que la limite $\lim_{x\to+\infty} \Phi_x$ existe (noter qu'elle peut valoir $+\infty$).

On la nomme **la limite inférieure de** f et elle est notée

$$\liminf_{x\to+\infty} f(x).$$

(e) Un exemple : soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \text{ appartient à } [0,1] \\ 2-x, & \text{si } x \text{ appartient à } [1,2] \end{cases}$$

et telle que $f(x) = f(x+2)$ pour tout réel positif x (on dit que f est périodique de période 2).
(i) Représenter graphiquement f sur le segment $[0,4]$.
(ii) Que vaut $\varphi_x(h)$ pour x positif et h supérieur ou égal à 2 ?
(iii) En déduire Φ_x puis $\liminf_{x\to+\infty} f(x)$.

(f) Soit f de nouveau une fonction quelconque continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On reprend les notations de 5a et 5b.
(i) Soit x un réel positif. Montrer que pour tout réel h positif, on a $f(x) \geq \varphi_x(h)$.
(ii) En déduire l'inégalité $\Phi_x \leq f(x)$.
(iii) On suppose que

$$\liminf_{x\to+\infty} f(x) > 0.$$

Montrer qu'il existe deux réels x_0 et ε strictement positifs tels que pour tout x supérieur ou égal à x_0 on a $f(x) \geq \varepsilon$.

(g) Soit f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que $f(x) \geq g(x)$ pour tout x positif, et

$$\liminf_{x \to +\infty} g(x) = \ell$$

où ℓ est un réel positif. Montrer que

$$\liminf_{x \to +\infty} f(x) \geq \ell.$$

Exercice 2. (**Indice de Gini - D'après **ESSEC II 2017**)

On rappelle qu'une fonction (numérique) sur l'intervalle J de $\mathbb{R}$ est dite *convexe* si elle vérifie la propriété suivante:

$$\forall (t_1, t_2) \in J^2,\ \forall \lambda \in [0:1], \quad f(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leq \lambda f(t_1) + (1-\lambda) f(t_2).$$

On rappelle qu'une fonction f est *concave* si $-f$ est convexe. On désigne par E l'ensemble des applications f définies sur $[0;1]$ à valeurs dans $[0;1]$, continues et convexes sur $[0;1]$ et telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Pour toute application f de E, on note $\tilde{f}$ l'application associée à f, définie sur $[0;1]$ par $\tilde{f}(t) = t - f(t)$.

Enfin, on définit **l'indice de Gini** de l'application f, noté $I(f)$, en posant

$$I(f) = 2\int_0^1 \tilde{f}(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^1 (t - f(t))\mathrm{d}t.$$

(1) (a) Donner une interprétation géométrique de la propriété de convexité.
(b) Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, rappeler la caractérisation de la convexité de f sur $[0;1]$ à l'aide de la dérivée f'.

(2) (a) Justifier que $\tilde{f}$ est concave sur $[0;1]$.
(b) Montrer que $I(f) = 1 - 2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.
(c) Représenter dans un même repère orthonormé les fonctions $t \mapsto t$ et f et donner une interprétation géométrique de $I(f)$.

(3) **Un premier exemple**
Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(t) = t^2$ pour tout $t \in [0;1]$.
(a) Montrer que f est élément de E.
(b) Calculer $I(f)$.

(4) **Propriétés de l'indice de Gini**
(a) Pour f élément de E, établir que $I(f) \geq 0$.
(b) Montrer que $I(f) = 0$ si et seulement si $f(t) = t$ pour tout $t \in [0;1]$.
(c) Montrer que pour tout f élément de E, $I(f) < 1$.
(d) Pour tout entier $n > 0$, on définit f_n sur $[0;1]$ par $f_n(t) = t^n$.
(i) Pour tout entier n strictement positif, calculer $I(f_n)$.
(ii) En déduire que pour tout réel A vérifiant $0 \leq A < 1$, il existe f dans E tel que $I(f) > A$.

(5) **Minoration de l'indice de Gini**
(a) Soit f élément de E. Montrer qu'il existe t_0 dans $]0;1[$ tel que $\tilde{f}(t_0) = \max\limits_{t \in [0;1]} \tilde{f}(t)$.
(b) Montrer que pour tout t de $[0;t_0]$, $\tilde{f}(t) \geq \tilde{f}(t_0)\dfrac{t}{t_0}$.
(c) Montrer que pour tout t de $[t_0;1]$, $\tilde{f}(t) \geq \tilde{f}(t_0)\dfrac{t-1}{t_0-1}$.
(d) En déduire que $I(f) \geq \tilde{f}(t_0)$.

Exercice 3. (***Value at Risk - D'après **ESSEC I 2016**)

On s'intéresse dans ce problème à deux mesures du risque utilisées par les marchés financiers.
Pour cela, on considère des variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui modélisent des pertes financières subies par des acteurs économiques sur une période donnée.
Toutes les variables aléatoires définies dans ce problème sont des variables aléatoires sur cet espace probabilisé.
Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des variables aléatoires réelles à densité X vérifiant :

- X admet une espérance notée $E(X)$.
- Il existe un intervalle I_X (dont on admet l'unicité) sur lequel la fonction de répartition de X, notée F_X, réalise une bijection de classe C^1 strictement croissante de I_X sur $]0,1[$.
  On note G_X la bijection réciproque, définie de $]0,1[$ sur I_X. Les notations F_X et G_X seront utilisées dans tout le sujet.

Dans tout le problème β est un réel appartenant à $]0,1[$ et représentant un niveau de confiance.

Partie I - Définition et propriétés de la "Value at Risk"

(1) Soit $X \in \mathcal{D}$. Montrer qu'il existe un unique réel v tel que $P([X \leq v]) = \beta$, et que l'on a $v = G_X(\beta)$.

- On définit alors $r_\beta(X)$ appelé la "Value at Risk" au niveau de confiance β de X, par $r_\beta(X) = G_X(\beta)$. C'est une grandeur qui permet d'évaluer le risque pris par l'acteur qui détient l'actif dont les pertes sont modélisées par X.
- **On remarque que $r_\beta(X)$ est égal au capital minimal qu'il faut détenir pour être en mesure de couvrir les pertes de l'actif associé à X avec une probabilité égale à β**

(2) On suppose que, dans cette question, X est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda \in]0, +\infty[$.

(a) Rappeler la valeur de $F_X(x)$ pour tout réel x.
(b) En déduire que $X \in \mathcal{D}$ et que l'on a

$$r_\beta(X) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\beta).$$

(3) On suppose dans cette question que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale de paramètres m et σ^2 pour X et de paramètres μ et s^2 pour Y.
On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et φ la densité usuelle de cette loi.

(a) (i) Justifier que Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$. On note Φ^{-1} la bijection réciproque.
(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $F_X(x)$ en fonction de Φ, m, σ et x.
(iii) En déduire que $X \in \mathcal{D}$ et que $r_\beta(X) = m + \sigma\Phi^{-1}(\beta)$.

(b) Quelle est la loi de $X+Y$? En déduire $r_\beta(X+Y)$ en fonction de m,μ, σ, s et β.
(c) Pour quels $\beta \in]0,1[$ a-t-on $r_\beta(X+Y) \leq r_\beta(X) + R_\beta(Y)$?

(4) Soit X une variable aléatoire appartenant à $\mathcal{D}$, c un réel et λ un réel strictement positif. On pose $Y = X + c$ et $Z = \lambda X$ et on admet que Y et Z appartiennent à $\mathcal{D}$.

(a) Montrer que $r_\beta(Y) = r_\beta(X) + c$.
(b) Montrer que $r_\beta(Z) = \lambda r_\beta(X)$.

(5) Soit X et Y deux variables aléatoires appartenant à $\mathcal{D}$ et telles que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$.
(a) Comparer, pour tout réel x, $F_X(x)$ et $F_Y(x)$.

(b) En déduire que $r_\beta(X) \leq r_\beta(Y)$.

Partie II - Estimation de la valeur de $r_\beta(X)$

Dans la pratique la loi de X n'est pas totalement connue et on a besoin d'avoir une idée assez précise de la "Value at Risk" ne connaissant qu'un certain nombre de valeurs de cette variable.

On modélise cette situation en supposant, dans cette partie, que la loi de X dépend d'un paramètre θ inconnu appartenant à un sous ensemble Θ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$, que $r_\beta(X) = g(\theta)$ où g est une fonction définie sur Θ et que pour tout $\theta \in \Theta$, $X \in \mathcal{D}$.

On utilise aussi les hypothèses et notations suivantes:

- $(X_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles appartenant à $\mathcal{D}$, mutuellement indépendantes, de même loi que X.
- pour tout $\omega \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on ordonne $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ dans l'ordre croissant et on note alors $X_{1,n}(\omega), \ldots, X_{n,n}(\omega)$ les valeurs obtenues.
  En particulier, $X_{1,n}(\omega)$ est la plus petite des valeurs $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ et $X_{n,n}(\omega)$ la plus grande.
- on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$, les $X_{k,n}$ sont des variables aléatoires.
- pour tout réel x et tout entier naturel non nul n, on définit la variable aléatoire $N_{x,n}$ ainsi :
  pour tout $\omega \in \Omega$, $N_{x,n}(\omega)$ est le nombre d'indices k compris entre 1 et n tels que l'on ait $X_k(\omega) \leq x$.

(6) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $N_{x,n}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. En déduire l'espérance et la variance de $N_{x,n}$.

(7) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left[\left|\frac{N_{x,n}}{n} - F_X(x)\right| \geq \varepsilon\right]\right) = 0.$$

(8) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il y a égalité entre les événements $[X_{k,n} \leq x]$ et $[N_{x,n} \geq k]$.

(b) En déduire que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$P([X_{k,n} \leq x]) = \sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} (F_X(x))^r (1 - F_X(x))^{n-r}$$

et que $X_{k,n}$ est une variable aléatoire à densité.

(9) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires et c un réel. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} P([|U_n - c| \geq \varepsilon]) = 0.$$

On considère $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite convergente de réels et on pose

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

(a) Établir que

$$\lim_{n\to+\infty} P([U_n \geq t]) = \begin{cases} 0, & \text{si } t > c \\ 1, & \text{si } t < c \end{cases}$$

(b) On suppose $\ell > c$ et on pose $\varepsilon = \dfrac{\ell - c}{2}$.

En remarquant que $\ell - \varepsilon = c + \varepsilon$, montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq c + \varepsilon$.

En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} P([U_n \geq u_n]) = 0.$$

(c) Montrer de même que si $\ell < c$,
$$\lim_{n\to+\infty} P([U_n \geq u_n]) = 1.$$

(10) On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\beta \geq 1$, la variable aléatoire Y_n sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par $Y_n = X_{\lfloor n\beta \rfloor, n}$ où $\lfloor n\beta \rfloor$ désigne la partie entière de $n\beta$ et on pose $\theta' = r_\beta(X)$.
Soit $\varepsilon > 0$.
(a) Montrer que : $P([|Y_n - \theta'| \leq \varepsilon]) = P([Y_n \leq \theta' + \varepsilon]) - P([Y_n \leq \theta' - \varepsilon])$.
(b) En déduire que
$$P([|Y_n - \theta'| \leq \varepsilon]) = P\left(\left[\frac{N_{\theta'+\varepsilon,n}}{n} \geq \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right]\right) - P\left(\left[\frac{N_{\theta'-\varepsilon,n}}{n} \geq \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right]\right)$$
(c) En déduire que
$$\lim_{n\to+\infty} P([|Y_n - \theta'| \leq \varepsilon]) = 1.$$
Que peut-on en déduire concernant l'estimateur Y_n de $r_\beta(X)$?

(11) On suppose que l'on a défini un fonction d'en-tête `function R=triCroissant(T)` qui renvoie le tableau des valeurs se trouvant dans `T` rangées dans l'ordre croissant.

Par exemple, si `T=[0 -1 0 2 4 2 3]` alors `disp(triCroissant(T))` affiche :

```
ans =

-1.   0.   0.   2.   2.   3.   4.
```

Écrire une fonction `Scilab` d'en-tête `function r=VaR(X,beta)` qui renvoie la valeur de l'estimation obtenue avec l'estimateur Y_n pour $r_\beta(X)$ si le tableau `X` contient la réalisation de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ et `beta` la valeur de β.

Exercice 4. (*Lois de Laplace - D'après **ESSEC I 2017**)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$. On dit qu'une variable aléatoire réelle à densité suit une loi de Laplace de paramètre (α, β), notée $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$, si elle admet comme densité la fonction f donnée par:
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|t-\alpha|}{\beta}\right)$$

(1) Vérifier que f est bien une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle.
(2) Déterminer la fonction de répartition, notée Ψ, de la loi $\mathcal{L}(0,1)$.
(3) On suppose que X suit la loi $\mathcal{L}(0,1)$.
(a) Montrer que $\beta X + \alpha$ suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.
(b) En déduire la fonction de répartition de la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

(4) *Espérance et variance.*
(a) On suppose que X suit la loi $\mathcal{L}(0,1)$.
Montrer que $E(X)$ et $V(X)$ existent et valent respectivement 0 et 2.
(b) En déduire l'existence et les valeurs de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire réelle qui suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

(5) *Simulation à partir d'une loi exponentielle.*
Soit U une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1 et V une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et indépendante de U.

(a) En utilisant le système complet naturellement associé à V, montrer que $X = (2V-1)U$ suit la loi $\mathcal{L}(0,1)$.

(b) Compléter la définition `Scilab` ci-dessous pour que la fonction ainsi définie réalise la simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$:

```
function r = Laplace(alpha,beta)

if ......... <= 1/2
  V = 1
else
  V = 0
end

X = (2*V - 1) * grand(1, 1, "exp", 1)

r = ...........

endfunction
```

Exercice 5. (***Lois ε−différentielles - D'après **ESSEC I 2017**)

Soit $\varepsilon > 0$. On dit que (X, Y), un couple de variables aléatoires, est un couple ε-différentiel si, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{-\varepsilon}\mathrm{P}([X \in I]) \leq \mathrm{P}([Y \in I]) \leq \mathrm{e}^{\varepsilon}\mathrm{P}([X \in I])$$

Intuitivement, les lois de X et Y seront d'autant plus proches que le plus petit ε tel que (X, Y) soit un couple ε-différentiel est proche de 0.

(1) Soit (X, Y, Z) un triplet de variables aléatoires réelles.
  (a) Montrer que si (X, Y) est ε-différentiel alors (Y, X) l'est aussi.
  (b) Montrer que si (X, Y) est ε-différentiel et (Y, Z) est ε'-différentiel alors (X, Z) est $(\varepsilon + \varepsilon')$-différentiel.

(2) Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes. On suppose que $X(\Omega) \cup Y(\Omega) = \{z_n / n \in J\}$ où J est un sous ensemble non vide de $\mathbb{N}$.

Montrer que (X, Y) est ε-différentiel si et seulement si

$$\forall n \in J, \quad \mathrm{e}^{-\varepsilon}\mathrm{P}([X = z_n]) \leq \mathrm{P}([Y = z_n]) \leq \mathrm{e}^{\varepsilon}\mathrm{P}([X = z_n])$$

(3) *Premier exemple.*
Dans cette question, on suppose que X suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$, Z suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ et elles sont indépendantes. On pose $Y = X + Z$.

  (a) Déterminer la loi de Y.
  (b) Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$1 - p \leq \frac{\mathrm{P}([Y = k])}{\mathrm{P}([X = k])} \leq \frac{1}{1 - p}.$$
  (c) En déduire que (X, Y) est $-\ln(1 - p)$-différentiel.
  (d) Que ce passe-t-il lorsque p s'approche de 0 ou lorsqu'il s'approche de 1? Était-ce prévisible?

(4) On suppose que X et Y sont deux variables à densité de densités respectives f et g et de fonction de répartition F et G.

  (a) On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-\varepsilon}f(t) \leq g(t) \leq \mathrm{e}^{\varepsilon}f(t)$.
  Montrer que (X, Y) est ε-différentiel.

(b) On suppose dans la suite de cette question que (X, Y) est ε-différentiel.
Soit $h > 0$ et $t \in \mathbb{R}$ où f et g sont continues.

Montrer que:

$$\mathrm{e}^{-\varepsilon}\frac{F(t+h)-F(t)}{h} \leq \frac{G(t+h)-G(t)}{h} \leq \mathrm{e}^{\varepsilon}\frac{F(t+h)-F(t)}{h}$$

En conclure que

$$\mathrm{e}^{-\varepsilon}f(t) \leq g(t) \leq \mathrm{e}^{\varepsilon}f(t).$$

(5) *Deuxième exemple: lois de Cauchy.*

(a) Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

converge. On admet que cette intégrale est égale à π.

(b) On définit, pour $a > 0$, la fonction f_a sur $\mathbb{R}$ par, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f_a(t) = \frac{a}{\pi(t^2+a^2)}.$$

Montrer que f_a est une densité de probabilité d'une variable aléatoire à densité.

(c) On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires admettant comme densités respectives f_1 et f_a avec $a > 1$. Montrer que (X, Y) est $\ln(a)$-différentiel.

(6) *Une première interprétation.*

On suppose que (X, Y) est un couple ε-différentiel et que U est une variable de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ indépendante de X et Y.

On définit la variable aléatoire Z par:

$$\forall\omega \in \Omega, \quad Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } U(\omega) = 1 \\ Y(\omega) & \text{sinon.}\end{cases}$$

(a) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ telle que $\mathrm{P}([Z \in I]) \neq 0$.
Montrer que :

$$\mathrm{P}_{[Z\in I]}([U=1]) = p\,\frac{\mathrm{P}([X \in I])}{p\mathrm{P}([X \in I]) + (1-p)\mathrm{P}([Y \in I])}.$$

En déduire que:

$$\frac{p}{p+(1-p)\mathrm{e}^{\varepsilon}} \leq \mathrm{P}_{[Z\in I]}([U=1]) \leq \frac{p}{p+(1-p)\mathrm{e}^{-\varepsilon}}$$

(b) Si ε est proche de zéro, le fait de disposer d'une information sur la valeur de Z change-t-il notablement le paramètre de la loi de U et par conséquent la probabilité d'en déduire la valeur prise par U?

Exercice 6. (**Distance entre probabilités - D'après **ESSEC II 2006**)

On considère un ensemble $\mathcal{K}$ qui peut être ou bien une partie finie de $\mathbb{N}$ ou bien égal à $\mathbb{N}$ tout entier. Sur l'espace probabilisable $(\mathcal{K}, \mathcal{P}(\mathcal{K}))$, on définit deux probabilités P et Q et on note

$$p_k = P(\{k\}) \quad \text{et} \quad q_k = Q(\{k\}) \qquad (k \in \mathcal{K}).$$

En particulier, on a $p_k, q_k \geq 0$,

$$\sum_{k\in\mathcal{K}} p_k = \sum_{k\in\mathcal{K}} q_k = 1,$$

et, si A est une partie de $\mathcal{K}$,

$$P(A) = \sum_{k\in A} p_k.$$

Si $\mathcal{K}$ est fini, on introduit la *distance en variation entre les probabilités* P et Q par la formule

$$D(P,Q) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathcal{K}} |p_k - q_k|.$$

(1) On suppose dans cette question que $\mathcal{K} = \{0;1\}$.

Exprimer $D(P,Q)$, en fonction de p_1 et q_1.

(2) On suppose dans cette question que $\mathcal{K} = \mathbb{N}$.

(a) Montrer, à l'aide de l'inégalité triangulaire, que la série de terme général $|p_k - q_k|$ est convergente.

On généralise alors la définition de distance en variation entre des probabilités P et Q définies sur $\mathbb{N}$ en posant

$$D(P,Q) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} |p_k - q_k|.$$

(b) Vérifier que pour toute partie A de $\mathbb{N}$, $|P(A) - Q(A)| \leq 1$.

(c) Montrer que, pour toute partie A de $\mathbb{N}$,

$$2|P(A) - Q(A)| = \left|\sum_{k\in A}(p_k - q_k)\right| + \left|\sum_{k\in\overline{A}}(p_k - q_k)\right|.$$

(d) En déduire que, pour toute partie A de $\mathbb{N}$,

$$|P(A) - Q(A)| \leq D(P,Q).$$

(e) Montrer qu'en prenant $A = \{k \in \mathbb{N} : \ q_k \geq p_k\}$, l'inégalité précédente devient une égalité.

(f) En déduire que

$$D(P,Q) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \min(p_k, q_k).$$