ECE 2 - Année 2017-2018
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Préparation à l'épreuve orale

Concours d'entrée à Saint-Cyr

Extraits du rapport du jury, session 2017

Le candidat dispose de **30 minutes** pour préparer **deux exercices** : un exercice de nature « classique » et un exercice nécessitant l'utilisation [...] d'un logiciel de calcul numérique (`SciLab`).

L'interrogation orale dure **25 minutes** et se déroule à la fois au tableau et devant un ordinateur.

Un candidat n'ayant pas réussi à résoudre les exercices pendant la préparation peut cependant obtenir une très bonne note. **L'épreuve orale est un échange entre le candidat et l'examinateur**.

Les candidats peuvent tirer profit de cet échange en exposant leurs idées et les problèmes rencontrés, puis en écoutant les indications directes ou indirectes. Avant de se lancer dans une démonstration, le candidat prendra soin d'expliquer rapidement son cheminement, ses difficultés éventuelles.

Il ne faut pas oublier qu'il s'agit d'une interrogation de mathématiques : l'examinateur attend de la **rigueur** dans l'application des théorèmes durant la phase de présentation de la démonstration. La vérification des hypothèses doit être spontanée. Ceci n'est pas la même chose durant la phase de recherche (y compris au tableau).

La durée de l'interrogation est limitée. Il est donc souhaitable de traiter relativement rapidement les questions les plus simples. Faire durer la présentation des questions sur lesquelles on se sent à l'aise est une erreur stratégique. Pour la même raison, les calculs effectués durant la préparation n'ont pas besoin, en principe, d'être repris intégralement au tableau : le candidat entame le calcul, explique la démarche, propose son résultat, puis l'examinateur demande ou non des précisions.

Le jury tient compte de l'état de stress des candidats et la correction des erreurs est appréciée. Solliciter constamment l'approbation de l'examinateur est une attitude improductive à proscrire. Il est souhaitable de faire preuve d'autonomie. Si le jury doit intervenir, il le fera.

Exemples de couplages d'exercices

Exemple 1

Exercice 1. Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

(1) *Question de cours* : Rappeler la définition de la convergence en loi pour une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)(1-x)^n, & \text{si } x \in [0;1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est la densité d'une variable aléatoire notée X_n

(2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = nX_n$.
  (a) Calculer la fonction de répartition F_n de la variable Y_n.
  (b) Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires (Y_n).

Exercice 2. Soit n un entier naturel strictement positif. On considère l'application f définie sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ par

$$f\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} X^k.$$

(1) Montrer que f est un endomorphisme de E.
(2) Déterminer la matrice A de f relativement à la base canonique de E.
(3) Déterminer le rang de f, ainsi que l'image de f.
(4) Déterminer le noyau de f.
(5) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme f^n de E par récurrence

$$f^0 = \mathrm{id}_E, \qquad f^n = f \circ f^{n-1}.$$

Montrer que la famille $\{\mathrm{id}_E, f, f^2, ..., f^n\}$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

Exemple 2

Exercice 1.

(1) *Question de cours* : Soit une fonction f définie sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$. Rappeler la définition de la dérivabilité de f en x_0.
(2) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On note F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} f(0), & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t, & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

  (a) Montrer, pour tout réel x non nul, l'égalité

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{F(x)-F(0)}{x} - \frac{F(-x)-F(0)}{x}\right).$$

  (b) En déduire que g est continue en 0.
  (c) Montrer enfin que g est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $p \in]0;1[$. On dispose d'une pièce de monnaie qui amène *Pile* avec la probabilité p, et *Face* avec la probabilité $1-p$.

On lance la pièce jusqu'à obtenir pour la seconde fois *Pile*. On note X la variable aléatoire égale au nombre de *Face* obtenus au cours des lancers. On suppose que la variable X est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Par exemple, si les lancers donnent successivement *Pile-Pile*, alors $X = 0$, et si les lancers donnent successivement *Face-Pile-Face-Face-Pile*, alors $X = 3$.

(1) (a) Déterminer $P(X=0)$ et $P(X=1)$.
  (b) Plus généralement, déterminer la loi de la variable aléatoire X.
  (c) Vérifier que
$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) = 1.$$
(2) Que peut-on dire de l'événement « on n'obtient jamais deux *Pile* au cours d'une infinité de lancers de la pièce » ?
(3) Montrer que la variable X admet une espérance et la calculer.
(4) Compléter le script `SciLab` ci-dessous afin qu'il affiche une réalisation de la variable X

```
p=0.3;
S=0; n=0;
while S<2 do
    n=n+1;
    if ............  then
        S=S+1;
    end
end
disp(.............)
```

Exemple 3

Exercice 1.
(1) *Question de cours* : Donner la définition de la notion de valeur propre d'un endomorphisme.
(2) On considère l'endomorphisme ϕ de $\mathbb{R}_3[X]$ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ associe le polynôme $\phi(P) = 3P' + 2P$. Déterminer les valeurs propres de ϕ.

Exercice 2. Pour tout entier naturel n, on définit la fonction f_n qui à tout réel x associe le nombre $f_n(x) = n - xe^x$.
(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0;+\infty[$. Cette solution sera notée u_n.
(2) Soit $n \in \mathbb{N}$. En calculant $f_{n+1}(u_n)$, montrer que la suite (u_n) est croissante.
(3) Montrer par l'absurde que la suite (u_n) n'est pas convergente. Qu'en déduit-on sur sa limite ?
(4) Déterminer u_1. Proposer un programme `SciLab` permettant de calculer et d'afficher une valeur approchée à 10^{-3} de u_2.

☞ On s'entraînera donc en autonomie sur ces 3 exemples, dans le temps imparti avant de se confronter à des oraux de préparation dans les conditions de l'épreuve. Chaque étudiant.e aura l'opportunité de passer deux tels oraux.