Un été *caliente* - Cahier de vacances

(*) Facile (**) Classique/intermédiaire (***) Difficile

Questions incontournables

Les questions de cette partie sont indépendantes et reprennent des techniques, calculs et notions à maîtriser sur le bout des doigts.

Naturellement, il est également indispensable de connaître parfaitement les différentes formules du cours (formule de sommes classiques, formule du binôme, somme des séries usuelles, lois usuelles, etc...)

Le premier programme de colle de l'année scolaire sera entièrement consacré à ces questions incontournables. Chaque étudiant.e en aura toute une série à traiter et il est impensable de ne pas savoir le faire.

Calcul

(1) Résoudre le système suivant

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y-3z-t &=& 0 \\ 2x+y-5z+4t &=& 4 \\ x-2y+3t &=& -2 \\ -x+y+z-2t &=& -1 \end{array}\right.$$

(2) Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0;n]\!]$,

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

(3) Montrer, par la méthode de votre choix, que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \geq p+1$,

$$\sum_{k=p}^{n-1}\binom{k-1}{p-1} = \binom{n-1}{p}.$$

(4) Calculer

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j+1}.$$

Analyse

(1) Montrer que, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

(2) Nature de la branche en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\sqrt{e^{3x}+x-1}\right)$.

(3) Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

(4) Montrer, par convergence monotone, que la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = (u_n^2+1)/2$ est convergente et préciser sa limite.

(5) Montrer que la fonction f définie ci-dessous est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(6) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

(7) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, l'équation $x^{3n}+n^n x^n - 1 = 0$ admet une unique solution strictement positive a_n. Montrer que $a_n < 1/n$ et en déduire la limite de a_n lorsque $n \to +\infty$.

(8) Montrer que la fonction $f : x \mapsto x\exp(x^2)$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser et donner un développement limité de f^{-1} en 0.

(9) Montrer la convergence et calculer la somme des séries ci-dessous

$$(i)\ \sum_{n\geq 0}\frac{(n+1)^2(-2)^{n+2}}{5^n}, \qquad (ii)\ \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{\sqrt{n+3}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

(10) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^n \mathrm{d}t = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\mathrm{d}t = 0$$

(11) Montrer que

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t.$$

(12) (a) Rappeler la valeur de $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la convergence de l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}. En déduire la valeur de I_n en fonction de n.

(13) (`SciLab`) Écrire un programme qui demande à l'utilisateur de rentrer un nombre $A \geq 0$, calcule et affiche le plus petit entier N tel que $u_N \geq A$, où la suite (u_n) est définie par

$$u_0 = 2, \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \exp(u_n) - e\ln(u_n).$$

(14) (`SciLab`) Écrire un programme de dichotomie permettant de donner une valeur approchée à 10^{-4} de la solution de l'équation $e^x + x = 3$.

Algèbre Linéaire

(1) Déterminer **soigneusement**, par la formule du binôme, les puissances A^n ($n \in \mathbb{N}^*$) de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$. En déduire les puissances A^n ($n \in \mathbb{N}^*$) de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(On calculera $P(A)$.)

(3) Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $B^2 + B$ et déduire que B n'est pas inversible.

(4) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice *nilpotente*, c'est à dire pour laquelle il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.
   (a) Calculer $(I_n - A)(I_n + A + A^2 + ... + A^{p-1})$.
   (b) En déduire que $I_n - A$ est inversible et préciser son inverse.

(5) Montrer que la famille de vecteurs ci-dessous forme une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(6) Écrire la matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ puis celle dans la base $\mathcal{F} = \{-e_1, e_1 - e_2, -e_1 + e_2 + 4e_3\}$, où

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, -y + z, 3z).$$

(7) On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sans aucun calcul, déterminer l'image et le noyau de f. La matrice est-elle inversible?

Probabilités (élémentaires)

(1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, ..., A_n$ des évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer, par récurrence sur n (et à l'aide de la formule du crible) que

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \geq \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - (n-1).$$

(2) Un voyageur prend l'avion. À chaque voyage, la probabilité que sa valise soit retardée est de 1/12 et les incidents de bagages sont indépendants à chaque vol. Montrer **soigneusement** que, presque sûrement, ce voyageur subira un retard de valise lors d'une répétition infinie de trajets en avion.

Variables aléatoires réelles

(1) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1; n]\!])$. Montrer $E(X) = (n+1)/2$.
(2) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. Montrer, à l'aide de la formule du binôme, que $E(X) = np$.
(3) Soit X une v.a. finie telle que $X(\Omega) = [\![1; n]\!]$. Monter que

$$E(X) = \sum_{j=0}^{n-1} P(X > j).$$

(4) On effectue des tirages **sans remise** d'une boule dans une urne contenant $N-1$ boules blanches et une boule noire. On note X le rang d'apparition de la boule noire. Montrer que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;N]\!])$.
(5) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Montrer que X **admet** une espérance et que $E(X) = 1/p$.
(6) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Montrer que X **admet** une espérance et que $E(X) = \lambda$.
(7) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. On suppose que, **sachant** $(X = n)$, la variable aléatoire Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Montrer que $Y \hookrightarrow P(p\lambda)$.
(8) Soient X et Y deux v.a. indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. Montrer que $\min(X,Y) \hookrightarrow \mathcal{G}(1-(1-p)^2)$.
(9) (a) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$. Montrer que

$$-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda).$$

(b) En déduire une instruction `SciLab` pour simuler une loi exponentielle de paramètre λ (rentré par l'utilisateur) à l'aide de la commande `rand()`.

(10) Soient X_1 et X_2 deux v.a. indépendantes de même loi $\mathcal{U}([0;1])$. Montrer que $E(\max(X_1,X_2)) = 2/3$.
(11) (`SciLab`) Écrire, uniquement à l'aide de la fonction `rand()` une fonction `X=bino(n,p)` permettant de simuler une loi binomiale de paramètres n et p.
(12) (`SciLab`) Écrire, uniquement à l'aide de la fonction `rand()` une fonction `X=Attente(p)` permettant de simuler une loi géométrique de paramètre p.

Simple. Basique.

Exercice 1. (Implicitement votre) On considère la fonction f, dont la courbe est notée C_f, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^x - e^{-x}.$$

(1) **Étude de la fonction** f

(a) Donner le domaine de définition de f et étudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?
(b) Donner les valeurs suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x), \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Que peut-on en déduire pour la courbe C_f ?
(c) Calculer $f'(x)$ pour x réel.
(d) Construire le tableau de variation de f .
(e) Après avoir calculé $f(0)$, déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel x.
(f) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0. On note cette droite T.

(g) Montrer que la courbe C_f admet un point d'inflexion que l'on précisera et étudier la convexité de f.
(h) Construire sur un même schéma C_f et T.

(2) **Étude d'une suite implicite**.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère dans cette question l'équation

$$(E_n) : \qquad f(x) = n.$$

(a) Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution notée u_n.
(b) Préciser la valeur de u_0.
(c) Soit n un entier naturel non nul, calculer $f(\ln(n))$ et en déduire que $u_n \geq \ln(n)$?

(d) Soit n un entier naturel. Montrer que l'équation : $x^2 - nx - 1 = 0$ admet deux solutions réelles que l'on déterminera et dont on précisera les signes.
À l'aide du changement de variable $t = e^x$, déterminer la solution u_n de l'équation (E_n) pour n entier naturel.

Exercice 2. (Pour en finir avec les accroissements) On considère la fonction f, dont la courbe est notée C_f, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - 2 + \exp(-x).$$

(1) (a) Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} f(x).$$

(b) Montrer que la courbe C_f admet en $+\infty$ une droite asymptote Δ d'équation $y = x - 2$.
(c) Calculer

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \quad \text{puis} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Que pouvez-vous dire sur le comportement asymptotique de la courbe de f en $-\infty$?

(2) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x. Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

(3) Justifier que C_f coupe l'axe des abscisses en exactement deux points d'abscisses α et β, le premier étant positif, le deuxième étant négatif.

On donne $e \approx 2{,}7$. Prouver que $\alpha \in]1, 2[$.

(4) Tracer l'allure de C_f et Δ. On donne $\alpha \approx 1{,}84$ et $\beta \approx -1{,}14$.

(5) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2 - \exp -x$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g(u_n)$ pour tout entier naturel n.

(a) Montrer que pour tout réel x, on a : $g(x) = x$ si et seulement si $f(x) = 0$.
(b) Calculer la dérivée de g. En déduire le sens de variation de g.
Montrer alors que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n.
(c) Établir que pour tout réel x appartenant à $[1, 2]$: $0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{e}$.
(d) En déduire, en appliquant l'inégalité des accroissements finis que pour tout entier naturel n

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e}|u_n - \alpha|.$$

(e) Montrer par récurrence que

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{\exp(n)}.$$

Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 3. (Pour intégrer l'intégration)
Pour tout entier n on note:

$$I_n = \int_0^1 e^{-x^2}(1-x)^n dx \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 xe^{-x^2}(1-x)^n dx.$$

(1) (a) Former le tableau de variation sur [0,1] de $x \to xe^{-x^2}$.
(b) En déduire pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{\sqrt{2e}(n+1)}.$$

(c) Etudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) (a) A l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$I_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+1}.$$

(b) En déduire la limite de I_n et celle de $n.I_n$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4. Un commerçant dispose d'un stock de plantes. Chacune des plantes fleurit une fois par an. Pour chaque plante ,la première année, la probabilité de donner une fleur rose vaut $\frac{3}{4}$, la probabilité de donner une fleur blanche vaut $\frac{1}{4}$. Puis les années suivantes, pour tout entier naturel n non nul :

- si l'année n, la plante a donné une fleur rose, alors l'année $n+1$ elle donnera une fleur rose.
- si l'année n la plante a donné une fleur blanche, alors elle donnera l'année $n+1$ de façon équiprobable une fleur rose ou une fleur blanche.

On désigne par n un entier naturel non nul. Pour une plante donnée, on note p_n, la probabilité de l'événement R_n "la plante donne une fleur rose la nième année".

(1) A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite arithmético-géométrique qui vérifie :

$$p_{n+1} = \frac{1}{2} p_n + \frac{1}{2}$$

(2) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et de p_1 .

(3) Que vaut p_1 ? En déduire p_n , ainsi que la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$

(4) (a) Quelle est la probabilité pour que la plante ne donne que des fleurs roses pendant les n premières années ?

(b) Quelle est la probabilité pour que la plante ne donne que des fleurs blanches pendant les n premières années ?

Probabilités continues

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et indépendantes. On suppose que X est une variable à densité et on note F_X sa fonction de répartition. On suppose par ailleurs que la loi de Y est donnée par

$$P(Y=1) = P(Y=-1) = \frac{1}{2}.$$

L'indépendance de X et Y se traduit par les égalités suivantes, valables pour tout réel x,

$$P\left([X \leq x] \cap [Y=1]\right) = P\left(X \leq x\right) P\left(Y=1\right)$$

et

$$P\left([X \leq x] \cap [Y=-1]\right) = P\left(X \leq x\right) P\left(Y=-1\right).$$

On pose $Z = XY$ et on admet que Z est, elle-aussi, une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On se propose d'établir deux résultats utiles pour la suite dans la partie 1, puis d'en déduire la loi de la variable aléatoire Z en fonction de la loi de X dans les parties 2 et 3.

Partie 1 : Expression de la fonction de répartition de Z en fonction de celle de X.

(1) Rappeler l'expression des fonctions de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$ (avec $a < b$) et d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ (avec $\lambda > 0$).

(2) En utilisant le système complet d'événements $\{(Y=1), (Y=-1)\}$, montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \frac{1}{2}\left(F_X(x) - F_X(-x) + 1\right).$$

Partie 2 : Étude de deux premiers exemples.

(1) On suppose que la loi de X est la loi normale centrée réduite.
Reconnaître la loi de Z.

(2) On suppose que la loi de X est la loi uniforme sur $[0,1]$.
 (a) Déterminer l'expression de $F_X(-x)$ selon les valeurs prises par x.
 (b) Déterminer $F_Z(x)$ pour tout réel x, puis reconnaître la loi de Z.

Partie 3 : Étude du cas où la loi de X est la loi exponentielle de paramètre 1.

(1) (a) Montrer que la fonction de répartition F_Z de la variable aléatoire Z est définie par :

$$F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{2}e^{x}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

 (b) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité.
 (c) Établir alors qu'une densité de Z est la fonction f_Z définie pour tout réel x par

$$f_Z(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}.$$

 (d) Donner la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx.$$

 (e) Montrer que f_Z est une fonction paire et en déduire l'existence et la valeur de $E(Z)$.

(2) (a) Donner la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx.$$

 (b) En déduire l'existence et la valeur de $E(Z^2)$, puis donner la valeur de la variance de Z.

(3) (a) Déterminer $E(X)E(Y)$ et comparer avec $E(Z)$. Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?
 (b) Exprimer Z^2 en fonction de X, puis en déduire de nouveau la variance de Z.

(4) Soit U et V des variables aléatoires suivant respectivement la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ et la loi uniforme sur $[0,1[$.
 (a) On pose $Q = -\ln(1-V)$ et on admet que Q est une variable aléatoire. Déterminer la fonction de répartition de Q et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire Q.
 (b) On pose $R = 2U - 1$ et on admet que R est une variable aléatoire. Déterminer $R(\Omega)$ et donner la loi suivie par la variable R.
 (c) Informatique.
 En tenant compte des résultats des questions 5a) et 5b), écrire en `SciLab` une déclaration de fonction dont l'entête est `function y=Z()` pour qu'elle simule la loi de Z.

Chaud cacao

Exercice 5. (***Limite inférieure - D'après **ESSEC II 2015**)

Si a et b sont deux entiers tels que $a \leq b$. Pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de réels et I ensemble fini d'entiers naturels, on notera $\min_{i\in I}\ x_i$ le plus petit élément de l'ensemble $\{x_i, i \in I\}$. Par exemple,

$$\min_{i\in[\![1;9]\!]} \frac{1}{i} = \frac{1}{9}.$$

(1) Un exemple : déterminer $\displaystyle\min_{i\in[\![0;4]\!]} \frac{(-1)^i}{i+1}$.

(2) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs. Pour n entier naturel fixé, on pose pour tout k de $\mathbb{N}$,

$$u_n(k) = \min_{i\in[\![n;n+k]\!]} x_i.$$

(a) Montrer que la suite $(u_n(k))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
(b) En déduire que la suite $(u_n(k))_{k\geq 0}$ est convergente. On note

$$u_n = \lim_{k\to+\infty} u_n(k).$$

(c) Établir une inégalité entre les réels $u_{n+1}(k)$ et $u_n(k+1)$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
(d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ admet une limite (qui peut être $+\infty$).

Cette limite est dite **limite inférieure de la suite** $(x_n)_{n\geq 0}$ et est notée $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$.

(3) Soient les deux suites réelles positives $(y_n)_{n\geq 0}$ et $(z_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = 1 + (-1)^n, n \geq 0$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \begin{cases} 2, & \text{si } n \text{ est pair} \\ n, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

(a) Expliciter pour n positif ou nul et k supérieur ou égal à 1 les termes $u_n(k)$ associés à chacune des deux suites $(y_n)_{n\geq 0}$ et $(z_n)_{n\geq 0}$.
(b) Déterminer $\liminf\limits_{n\to+\infty} y_n$ et $\liminf\limits_{n\to+\infty} z_n$.

(4) (a) On suppose ici que $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de réels positifs. Comparer u_n et x_n et en déduire que si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge en croissant vers un réel ℓ, alors

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \ell.$$

(b) Montrer que si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de réels positifs, convergente vers un réel ℓ, alors

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \ell.$$

(c) (i) Soient $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ des réels donnés et soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout i tel que $1 \leq i \leq r$, α_i appartient à I. Montrer que

$$\min_{i\in[\![1;r]\!]} \alpha_i \in I.$$

(ii) Démontrer que si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de réels positifs convergente vers ℓ réel positif, on a

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \ell.$$

(5) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Pour x réel positif fixé, on définit la fonction φ_x sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall h \geq 0, \quad \varphi_x(h) = \min_{u\in[x,x+h]} f(u).$$

(a) Montrer que la fonction φ_x est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
(b) En déduire que $\varphi_x(h)$ a une limite dans $\mathbb{R}_+$ quand h tend vers $+\infty$. On note Φ_x cette limite.
(c) Montrer que $x \mapsto \Phi_x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
(d) En déduire que la limite $\lim_{x\to+\infty} \Phi_x$ existe (noter qu'elle peut valoir $+\infty$).

On la nomme **la limite inférieure de** f et elle est notée

$$\liminf_{x\to+\infty} f(x).$$

(e) Un exemple : soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \text{ appartient à } [0,1] \\ 2-x, & \text{si } x \text{ appartient à } [1,2] \end{cases}$$

et telle que $f(x) = f(x+2)$ pour tout réel positif x (on dit que f est périodique de période 2).

(i) Représenter graphiquement f sur le segment $[0, 4]$.
(ii) Que vaut $\varphi_x(h)$ pour x positif et h supérieur ou égal à 2 ?
(iii) En déduire Φ_x puis $\liminf_{x\to+\infty} f(x)$.

(f) Soit f de nouveau une fonction quelconque continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On reprend les notations de 5a et 5b.
(i) Soit x un réel positif. Montrer que pour tout réel h positif, on a $f(x) \geq \varphi_x(h)$.
(ii) En déduire l'inégalité $\Phi_x \leq f(x)$.
(iii) On suppose que
$$\liminf_{x\to+\infty} f(x) > 0.$$
Montrer qu'il existe deux réels x_0 et ε strictement positifs tels que pour tout x supérieur ou égal à x_0 on a $f(x) \geq \varepsilon$.

(g) Soit f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que $f(x) \geq g(x)$ pour tout x positif, et
$$\liminf_{x\to+\infty} g(x) = \ell$$
où ℓ est un réel positif. Montrer que
$$\liminf_{x\to+\infty} f(x) \geq \ell.$$

Exercice 6. (**Distance entre probabilités - D'après **ESSEC II 2006**)

On considère un ensemble $\mathcal{K}$ qui peut être ou bien une partie finie de $\mathbb{N}$ ou bien égal à $\mathbb{N}$ tout entier. Sur l'espace probabilisable $(\mathcal{K}, \mathcal{P}(\mathcal{K}))$, on définit deux probabilités P et Q et on note
$$p_k = P(\{k\}) \quad \text{et} \quad q_k = Q(\{k\}) \qquad (k \in \mathcal{K}).$$
En particulier, on a $p_k, q_k \geq 0$,
$$\sum_{k\in\mathcal{K}} p_k = \sum_{k\in\mathcal{K}} q_k = 1,$$
et, si A est une partie de $\mathcal{K}$,
$$P(A) = \sum_{k\in A} p_k.$$
Si $\mathcal{K}$ est fini, on introduit la *distance en variation entre les probabilités* P et Q par la formule
$$D(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{k\in\mathcal{K}} |p_k - q_k|.$$

(1) On suppose dans cette question que $\mathcal{K} = \{0; 1\}$.

Exprimer $D(P, Q)$, en fonction de p_1 et q_1.

(2) On suppose dans cette question que $\mathcal{K} = \mathbb{N}$.

(a) Montrer, à l'aide de l'inégalité triangulaire, que la série de terme général $|p_k - q_k|$ est convergente.

On généralise alors la définition de distance en variation entre des probabilités P et Q définies sur $\mathbb{N}$ en posant
$$D(P, Q) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k - q_k|.$$

(b) Vérifier que pour toute partie A de $\mathbb{N}$, $|P(A) - Q(A)| \leq 1$.

(c) Montrer que, pour toute partie A de $\mathbb{N}$,

$$2|P(A) - Q(A)| = \left|\sum_{k\in A}(p_k - q_k)\right| + \left|\sum_{k\in \overline{A}}(p_k - q_k)\right|.$$

(d) En déduire que, pour toute partie A de $\mathbb{N}$,

$$|P(A) - Q(A)| \leq D(P,Q).$$

(e) Montrer qu'en prenant $A = \{k \in \mathbb{N} : \ q_k \geq p_k\}$, l'inégalité précédente devient une égalité.

(f) En déduire que

$$D(P,Q) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \min(p_k, q_k).$$

Exercice 7. (****D'après **HEC 2018**)

Partie 1

(1) Soit M la matrice définie par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Préciser le rang des matrices M et M^2.

(b) Montrer que les polynômes de la forme $P(X) = aX^3$, avec $a \in \mathbb{R}$, sont les seuls polynômes annulateurs de degré 3 de M.

(2) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $f^n = 0$. Pour $j \in [\![0;n]\!]$, on note F_j l'image de l'endomorphisme f^j et $r_j = \text{rg}(f^j) = \dim(F_j)$. Pour tout $j \in [\![0;n-1]\!]$, on note g_j la restriction de l'endomorphisme f à F_J, c'est à dire que, pour tout $x \in F_j$,

$$g_j(x) = f(x).$$

(a) Calculer r_0 et r_n.

(b) Soit $j \in [\![0;n-1]\!]$.

(i) Déterminer le rang de g_j.

(ii) Justifier l'égalité : $r_j - r_{j+1} = \dim\left(\text{Ker}(f) \cap F_j\right)$.

(c) Établir les inégalités

$$n \geq r_0 - r_1 \geq r_1 - r_2 \geq .... \geq r_{n-1} - r_n \geq 0.$$

Partie 2

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $P(k)$ l'ensemble des $k-$uplets d'entiers $(x_1, ..., x_k)$ tels que

$$\sum_{i=1}^{k} ix_i = k$$

et $p(k)$ le **cardinal** de $P(k)$.

(1) Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, on pose $x_i = \{j \in [\![0;n-1]\!] : \ r_j - r_{j+1} = i\}$.

(a) Montrer que $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est un élément de $P(n)$.

(b) Dans cette question, on suppose que $n = 4$.

(i) Déterminer (x_1, x_2, x_3, x_4) lorsque f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice M de la **Partie 1** est la matrice dans la base canonique.

(ii) Trouver l'ensemble $P(4)$ et vérifier que $p(4) = 5$.

(iii) Montrer que pour tout $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in P(4)$, il existe un endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ tel que
$$x_i = \{j \in [\![0; n-1]\!] : \ r_j - r_{j+1} = i\}.$$

(2) Pour tout couple $(\ell, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose : $Q(\ell, k) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in P(k); \ x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leq \ell\}$ et $q(\ell, k) = Card(Q(\ell, k))$.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

(i) Trouver l'ensemble $Q(1, k)$.

(ii) Pour tout entier $\ell \geq k$, justifier l'égalité : $Q(\ell, k) = P(k)$.

(b) (****) Pour tout couple (ℓ, k) d'entiers tels que $k > \ell \geq 2$, établir la relation :
$$q(\ell, k - \ell) = Card\left(\{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in P(k); \ x_1 + x_2 + \ldots + x_k = \ell\}\right)$$

(c) Soit ℓ un entier supérieur ou égal à 2.

(i) Pour tout entier $k > \ell$, montrer l'égalité : $q(\ell, k) = q(\ell - 1, k) + q(\ell, k - \ell)$.

(ii) Que vaut $q(\ell, \ell) - q(\ell - 1, \ell)$?

(3) La fonction `SciLab` suivante dont le script est incomplet (lignes (5) et (6)), calcule une matrice `qmatrix(n)` telle que pour chaque couple $(\ell, k) \in [\![1, n]\!]^2$, le coefficient situé à l'intersection de la ligne ℓ et de la colonne k est égal à $q(l, k)$.

```
(1)  function q=qmatrix(n)
(2)     q=ones(n,n)
(3)     for L=2:n
(4)         for K=2:n
(5)            if (K<L) then q(L,K)= ..........;
(6)                 else if (K==L) then q(L,K)= ............. ;
(7)                     else q(L,K)=q(L-1,K)+q(L,K-L);end;
(8)             end;
(9)         end;
(10)    end;
(11) endfunction
```

L'application de la fonction `qmatrix` à l'entier $n = 9$ fournit la sortie suivante :

```
--> qmatrix(9)

   1.   1.   1.   1.   1.   1.    1.    1.    1.
   1.   2.   2.   3.   3.   4.    4.    5.    5.
   1.   2.   3.   4.   5.   7.    8.    10.   12.
   1.   2.   3.   5.   6.   9.    11.   15.   18.
   1.   2.   3.   5.   7.   10.   13.   18.   23.
   1.   2.   3.   5.   7.   11.   14.   20.   26.
   1.   2.   3.   5.   7.   11.   15.   21.   28.
   1.   2.   3.   5.   7.   11.   15.   22.   29.
   1.   2.   3.   5.   7.   11.   15.   22.   30.
```

(a) Compléter les lignes (5) et (6) du script de la fonction `qmatrix`.

(b) Donner un script `SciLab` permettant de calculer $p(n)$ à partir d'une valeur de n entrée au clavier.

(c) Conjecturer une formule générale pour $q(2, k)$ applicable à tout entier $k \geq 1$, puis la démontrer.