ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Un exercice d'algèbre linéaire

Réduction des endomorphismes anti-involutifs

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$. On considère un endomorphisme f de E tel que

$$f^2 = -\mathrm{Id}.$$

(1) Montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \emptyset$

(2) (a) Soit $u \in E$, $u \neq 0$. Montrer, par l'absurde, que la famille $(u, f(u))$ est libre.
(b) Montrer que le sous-espace $F_u = \mathrm{Vect}(u, f(u))$ est *stable* sous l'action de f, c'est à dire que

$$\forall x \in F_u,\ f(x) \in F_u.$$

(3) Dans cette question uniquement on considère le cas $n = 2$.
(a) Donner, en exhibant une matrice qui représenterait f dans la base canonique, un exemple d'un tel endomorphisme.
(b) À l'aide de la question 2a, montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f présente des 0 sur la diagonale. Expliciter la matrice trouvée.

(4) On revient au cas général. On suppose[1] que $n = 2k$ est pair.
(a) On suppose qu'il existe, pour un certain $i \in [\![1; k-1]\!]$, des vecteurs $(u_1, u_2, ..., u_i)$ tels que la famille

$$(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), ..., u_i, f(u_i))$$

est libre. Montrer qu'il existe un vecteur u_{i+1} tel que la famille

$$(u_1, f(u_1), u_2, f(u_2), ..., u_i, f(u_i), u_{i+1}, f(u_{i+1}))$$

est encore libre.
(b) En déduire l'existence d'une base dans laquelle la matrice de f est de la forme

$$\begin{pmatrix}
0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 1 & 0 & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

[1]En fait, il est possible de montrer que c'est nécessaire