ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Concours Blanc n°3

Mardi 4 Décembre 2018
Durée : 4 heures

Exercice 1

Une puce se déplace sur un axe gradué. À l'instant 0, la puce se trouve sur le point d'abscisse 0. A partir de l'instant 0, la puce effectue à chaque instant, un saut vers la droite selon le protocole suivant:

- elle effectue un saut d'une unité vers la droite avec la probabilité $1/2$;
- elle effectue un saut de deux unités vers la droite avec la probabilité $1/4$;
- elle effectue un saut de trois unités vers la droite avec la probabilité $1/4$.

Les différents sauts sont supposés indépendants.
Pour tout entier $n \geq 1$, on définit les variables aléatoires suivantes :

- X_n est égale au nombre de sauts d'une unité effectués lors des n premiers sauts ;
- Y_n est égale au nombre de sauts de deux unités effectués lors des n premiers sauts ;
- Z_n est égale au nombre de sauts de trois unités effectués lors des n premiers sauts ;
- A_n est égale à l'abscisse du point occupé par la puce à l'issue de son n-ième saut.

(1) On rappelle qu'en `SciLab` l'instruction `grand(1,1,'uin',1,4)` simule une variable aléatoire suivant la loi discrète uniforme sur $[\![1;4]\!]$.
Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule les n premiers déplacements de la puce lorsque n est donné en paramètre.

```
function D = Deplacement(n)
    D = zeros(1,n)
    for k = 1 : n
        t = grand(1,1,'uin',1,4)
        if t <= ...... then D(k) = 1 end
        if t == ...... then D(k) = 2 end
        if t == ...... then D(k) = 3 end
    end
endfunction
```

(2) (a) Reconnaître les lois de X_n, Y_n et Z_n puis donner leurs espérances et leurs variances.
(b) Justifier que $X_n + Y_n$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
(c) En utilisant les valeurs de $V(X_n)$, $V(Y_n)$ et $V(X_n + Y_n)$ montrer que

$$\mathrm{Cov}(X_n, Y_n) = -\frac{n}{8}.$$

(d) Expliquer le signe de cette covariance puis calculer le coefficient de corrélation linéaire $\rho(X_n, Y_n)$. *On simplifiera les calculs.*

(3) (a) Déterminer $A_n(\Omega)$ puis calculer $P(A_n = n)$ et $P(A_n = 3n)$.
(b) Les variables aléatoires A_n et Z_n sont-elles indépendantes ?
(c) Exprimer A_n en fonction de X_n, Y_n et Z_n puis montrer que

$$E(A_n) = \frac{7n}{4}.$$

(d) Justifier la relation $X_n + Y_n + Z_n = n$.
(e) Exprimer alors A_n en fonction de X_n et Y_n puis en déduire $V(A_n)$.
(f) En utilisant la question (3d), justifier sans aucuns calculs que

$$\rho(Z_n, X_n + Y_n) = -1.$$

(4) Que représente le graphique obtenu en sortie du programme suivant ?

```
x=1:100
D=Deplacement(100)
y=cumsum(D)
plot2d(x,y)
```

Exercice 2

Partie I : Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et id l'application identité de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $u = e_1 - e_2 + e_3$ et $v = e_1 - e_2$.

(1) (a) Montrer que $u \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id})$.
(b) Vérifier que $(f - \mathrm{id})v = u$.
(c) En déduire que $v \in \operatorname{Ker}\left((f - \mathrm{id})^2\right)$.

(2) (a) Déterminer un vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la troisième coordonnée (dans la base $\mathcal{B}$) est nulle, telle que la famille $\mathcal{C} = (u, v, w)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ soit la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pensera à vérifier que la famille $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ une fois le vecteur w déterminé.

(b) Déduire de la question précédente que la matrice A est inversible.
(c) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie II : Étude d'un autre endomorphisme

On note $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 3.
On note $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$ les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{E}$.
On considère alors l'ensemble $\mathcal{F}$ suivant :

$$\mathcal{F} = \{P \in \mathcal{E} \ : \ P(0) = 0\}.$$

(3) Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel et que la famille $\mathcal{H} = (f_3, f_2, f_1)$ est une base de $\mathcal{F}$.

(4) On considère l'application g qui à tout élément P de $\mathcal{F}$ associe la fonction polynomiale Q définie par

$$Q(X) = (3X+1)P(X) - X^2P'(X).$$

- (a) Montrer que g est une application linéaire.
- (b) Soit $P \in \mathcal{F}$. Calculer $g(P)(0)$ et justifier brièvement pourquoi $g(P)$ est de degré inférieur ou égal à 3.
- (c) En déduire que g est un endomorphisme de $\mathcal{F}$.
- (d) Déterminer la matrice de g dans la base $\mathcal{H} = (f_3, f_2, f_1)$.
- (e) À l'aide la Question (2c), exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g^n(f_1)$ en fonction de f_1, f_2 et f_3.

Exercice 3

On considère la fonction f qui à tout réel x associe

$$f(x) = \int_0^x \ln\left(1+t^2\right) \mathrm{d}t.$$

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie I : étude de f

(1) (a) Déterminer le signe de $f(x)$ selon le signe de x.
- (b) Justifier que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
- (c) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ (on ne cherchera pas à calculer les limites de f).

(2) (a) Montrer que f est impaire.
- (b) Étudier la convexité de f et donner les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

(3) (a) Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}.$$

- (b) En déduire, grâce à une intégration par parties, que, pour tout réel x, on a

$$f(x) = x\left(\ln(1+x^2) - 2\right) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

(4) Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.
- (a) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

est une intégrale convergente.
- (b) En déduire que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln\left(1+x^2\right)$.

(c) Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, on a

$$\ln(1+x^2) = 2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right),$$

puis établir l'équivalent suivant

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln(x).$$

(d) Donner sans calcul un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de $-\infty$.

(5) Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

(a) Montrer que f est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0 pour la fonction f, c'est à dire

$$f(x) = f(0) + \frac{x^1}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + o(x^3)$$

(b) Déterminer $f(0), f'(0), f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.

(c) En déduire alors un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0. (on trouve $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^3}{3}$)

Partie II : étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n \mathrm{d}t.$$

(1) (a) La valeur donnée à u_0 est-elle cohérente avec l'expression générale de u_n?

(b) Exprimer u_1 à l'aide de la fonction f.

(2) (a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

(b) Montrer que la suite (u_n) est minorée par 0. En déduire qu'elle converge.

(3) (a) Établir l'encadrement suivant

$$0 \leqslant u_n \leqslant (\ln 2)^n.$$

(b) Que peut-on en déduire sur la suite (u_n)? Sur la série de terme général u_n?

(4) (a) Montrer que

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}\mathrm{d}t \leqslant \frac{u_n}{1-\ln 2}$$

(b) En déduire la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}\mathrm{d}t.$$

(c) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-\left(\ln(1+t^2)\right)^n}{1-\ln(1+t^2)}\mathrm{d}t.$$

(d) En déduire que l'on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)}\mathrm{d}t.$$