ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

# Concours Blanc n°3

*Mardi 4 Décembre 2018*
*Solution*

## Exercice 1

Une puce se déplace sur un axe gradué. À l'instant 0, la puce se trouve sur le point d'abscisse 0.
A partir de l'instant 0, la puce effectue à chaque instant, un saut vers la droite selon le protocole suivant:

- elle effectue un saut d'une unité vers la droite avec la probabilité $1/2$ ;
- elle effectue un saut de deux unités vers la droite avec la probabilité $1/4$ ;
- elle effectue un saut de trois unités vers la droite avec la probabilité $1/4$.

Les différents sauts sont supposés indépendants.
Pour tout entier $n \geq 1$, on définit les variables aléatoires suivantes :

- $X_n$ est égale au nombre de sauts d'une unité effectués lors des $n$ premiers sauts ;
- $Y_n$ est égale au nombre de sauts de deux unités effectués lors des $n$ premiers sauts ;
- $Z_n$ est égale au nombre de sauts de trois unités effectués lors des $n$ premiers sauts ;
- $A_n$ est égale à l'abscisse du point occupé par la puce à l'issue de son $n$-ième saut.

(1) On rappelle qu'en `SciLab` l'instruction `grand(1,1,'uin',1,4)` simule une variable aléatoire suivant la loi discrète uniforme sur $[\![1;4]\!]$.
Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule les $n$ premiers déplacements de la puce lorsque $n$ est donné en paramètre.

```
function D = Deplacement(n)
    D = zeros(1,n)
    for k = 1 : n
        t = grand(1,1,'uin',1,4)
        if t <= 2 then D(k) = 1 end  // car t<=2 avec probabilité 1/2
        if t == 3 then D(k) = 2 end  // car t=3 avec probabilité 1/4
        if t == 4 then D(k) = 3 end  // car t=4 avec probabilité 1/4
    end
endfunction
```

(2) (a) D'après la description de l'expérience:

- $X_n$ compte le nombre de succès (sauter d'une unité de probabilité $1/2$) lors ce $n$ expériences de Bernoulli (faire un saut) identiques et indépendantes. Ainsi, $X_n$ suit la loi binomiale de paramètres $n$ et $1/2$

$$X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right).$$

On a alors :
$$E(X_n) = \frac{n}{2}, \quad \text{et} \quad V(X_n) = \frac{n}{4}.$$

- De même : $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$, $E(Y_n) = \frac{n}{4}$ et $V(Y_n) = \frac{3n}{16}$.
- De même : $Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{4}\right)$, $E(Z_n) = \frac{n}{4}$ et $V(Z_n) = \frac{3n}{16}$.

(b) La variable $X_n + Y_n$ compte le nombre de succès (sauter d'une unité ou de deux unités de probabilité $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$) lors ce $n$ expériences de Bernoulli (faire un saut) identiques et indépendantes.
Ainsi,
$$X_n + Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{3}{4}\right).$$

(c) On a
$$V\left(X_n + Y_n\right) = V\left(X_n\right) + V\left(Y_n\right) + 2\text{Cov}\left(X_n, Y_n\right)$$
Or, $V\left(X_n + Y_n\right) = \frac{3n}{16}$ d'après la question précédente, ce qui donne :
$$\frac{3n}{16} = \frac{n}{4} + \frac{3n}{16} + 2\text{Cov}\left(X_n, Y_n\right)$$
soit
$$-\frac{n}{4} = 2\text{Cov}\left(X_n, Y_n\right)$$
et finalement
$$\text{Cov}\left(X_n, Y_n\right) = -\frac{n}{8}.$$

(d) Si le nombre de sauts de deux unités $(Y_n)$ augmente, alors le nombre de saut d'une unité $(X_n)$ diminue, ce qui explique le signe de la covariance.

D'autre part, comme $X_n$ et $Y_n$ ont des variances non nulles, on a :
$$\rho\left(X_n, Y_n\right) = \frac{\text{Cov}\left(X_n, Y_n\right)}{\sqrt{V(X_n)}\sqrt{V(Y_n)}}$$
soit
$$\rho\left(X_n, Y_n\right) = \frac{-\frac{n}{8}}{\sqrt{\frac{n}{4}}\sqrt{\frac{3n}{16}}} = \frac{-\frac{n}{8}}{\frac{\sqrt{n}}{2}\frac{\sqrt{3n}}{4}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$
Ainsi,
$$\rho\left(X_n, Y_n\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(3) (a) La position de la puce après $n$ saut sera au minimum de $n$ (que des sauts d'une unité) et au maximum de $3n$ (que de sauts de 3 unités). Pour justifier proprement que $A_n$ prend toutes les valeurs entre $n$ et $3n$, il *faudrait* faire une récurrence. On obtient alors : $A_n(\Omega) = [\![n; 3n]\!]$.
On a :

- L'évènement $[A_n = n]$ signifie qu'on a fait que des sauts d'une unité, ainsi $[A_n = n] = [X_n = n]$ et donc
$$P(A_n = n) = P(X_n = n) = \frac{1}{2^n}.$$

- L'évènement $[A_n = 3n]$ signifie qu'on a fait que des sauts de trois unités, ainsi $[A_n = 3n] = [Z_n = n]$ et donc

$$P(A_n = 3n) = P(Z_n = n) = \frac{1}{4^n}.$$

(b) L'évènement $[A_n = n \cap Z_n = n]$ est impossible (si $[Z_n = n]$ alors $[A_n = 3n]$) donc de probabilité nulle.
Or, $P([A_n = n])P([Z_n = n]) = \frac{1}{2^n}\frac{1}{4^n} \neq 0$ donc

$$P([A_n = n] \cap [Z_n = n]) \neq P([A_n = n])P([Z_n = n])$$

ce qui montre que les variables $A_n$ et $Z_n$ ne sont pas indépendantes.

(c) On a clairement

$$A_n = X_n + 2Y_n + 3Z_n$$

ce qui donne par linéarité de l'espérance :

$$E(A_n) = E(X_n) + 2E(Y_n) + 3E(Z_n)$$

soit

$$E(A_n) = \frac{n}{4} + 2\frac{n}{4} + 3\frac{n}{4} = \frac{7n}{4}.$$

(d) Les $n$ premiers sauts de la puce se départagent entre les sauts d'une unité $(X_n)$, de deux unités $(Y_n)$ et de trois unités $(Z_n)$. Ainsi, on a bien $X_n + Y_n + Z_n = n$.

(e) Des relations $X_n + Y_n + Z_n = n$ et $A_n = X_n + 2Y_n + 3Z_n$, on déduit que :

$$A_n = X_n + 2Y_n + 3(n - X_n - Y_n) \quad \text{soit} \quad A_n = 3n - (2X_n + Y_n)$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
V(A_n) = V(3n - (2X_n + Y_n)) &= V(-(2X_n + Y_n)) \quad \text{car } 3n \text{ est une constante} \\
&= (-1)^2 V(2X_n + Y_n) \\
&= V(2X_n) + V(Y_n) + 2\text{Cov}(2X_n, Y_n) \\
&= 4V(X_n) + V(Y_n) + 4\text{Cov}(X_n, Y_n) \\
&= 4\frac{n}{4} + \frac{3n}{16} + 4\left(\frac{-n}{8}\right) \\
&= \frac{11}{16}n
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$V(A_n) = \frac{11}{16}n.$$

(f) D'après la question 3d, on a :

$$X_n + Y_n + Z_n = n \quad \text{donc} \quad Z_n = n - (X_n + Y_n).$$

Ainsi, $Z_n$ est une fonction affine décroissante de $(X_n + Y_n)$ ce qui permet de conclure que

$$\rho(Z_n, X_n + Y_n) = -1.$$

(4) En sortie de ce programme, la variable $y$ donne les positions successives de la puce puisqu'on additionne chacun des déplacements avec la fonction `cumsum`. Le graphique illustre donc le déplacement de la puce lors de ses 100 premiers sauts.

# Exercice 2

### Partie I - Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

(1) (a) On a : $u = e_1 - e_2 + e_3 = (1, -1, 1)$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son vecteur coordonnées. Utilisons la matrice $A$ de $f$ dans la base canonique. On a

$$AU = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = U$$

donc $f(u) = u$, ou encore $u \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.

(b) On a : $v = e_1 - e_2 = (1, -1, 0)$. Raisonnons encore matriciellement. La matrice de $f - id$ dans la base canonique est $A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$(A - I)V = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = U$$

donc $(f - id)v = u$.

(c) On a, d'après les questions précédentes

$$\begin{aligned} (f - id)^2 v &= (f - id)\left((f - id)v\right) \\ &= (f - id)(u) \qquad \text{car } (f - id)v = u \\ &= 0 \qquad \text{car } u \in \mathrm{Ker}\,(f - id) \end{aligned}$$

Ainsi, $(f - id)^2 v = 0$ donc $v \in \mathrm{Ker}\left((f - id)^2\right)$.

(2) (a) Par définition de la matrice $f$ dans la base $\mathcal{C}$, on doit avoir les relations suivantes :

- $f(u) = u$, ce qui est vérifié d'après **??**.
- $f(v) = u + v$, ce qui est vérifié car $f(v) - v = u$ d'après **??**.
- $f(w) = 2v + w$.

On recherche donc un vecteur de coordonnées $w = (a, b, 0)$ dans la base canonique tel que : $f(w) = 2v + w$.

Matriciellement, cela donne :

$$f(w) = 2v + w \iff AW = 2V + W \iff \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3a + b &=& 2 + a \\ -2a &=& -2 + b \\ a &=& 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} b &=& 2 \\ a &=& 0 \end{array} \right.$$

Ainsi, $w = (0, 2, 0)$.

Vérifions à présent que la famille $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Montrons qu'elle est libre. Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$xu + yv + zw = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ -x-y+2z & = & 0 \\ x & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ 2z & = & 0 \\ x & = & 0 \end{array} \right. \iff x = y = z = 0$$

Ainsi, la famille $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une famille libre composée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 donc $\mathcal{C}$ une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) La matrice $T$ de $f$ dans la base $\mathcal{C}$ est triangulaire sans 0 sur sa diagonale donc elle est inversible. On en déduit que l'endomorphisme $f$ est bijectif. La matrice $A$ de $f$ dans la base canonique est donc également inversible.

(c) On montre ce résultat par récurrence.

- initialisaton. $T^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1.0 \\ 0 & 1 & 2.1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$.
- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T^nT = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1+n & 2n+n(n-1) \\ 0 & 1 & 2+2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & n(n+1) \\ 0 & 1 & 2(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc la propriété est vraie au rang $n + 1$, ce qui termine la récurrence.

**Partie II : Étude d'un autre endomorphisme**

(3) Soit $p \in \mathcal{E}$. Notons $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Alors :

$$p \in \mathcal{F} \iff p(0) = 0 \iff a0^3 + b0^2 + c0 + d = 0 \iff d = 0 \iff p(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

Ainsi, $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(x^3, x^2, x) = \mathrm{Vect}(f_3, f_2, f_1)$ donc $\mathcal{F}$ et le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(f_3, f_2, f_1)$ donc $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel.
De plus, la famille $(f_3, f_2, f_1)$ est libre ($(f_3, f_2, f_1)$ sont des vecteurs de la base canonique).
Donc la famille $(f_3, f_2, f_1)$ est une base de $\mathcal{F}$.

(4) (a) Soient $(p, q) \in \mathcal{E}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} g(p + \lambda q) &= (3x + 1)(p + \lambda q)(x) - x^2(p + \lambda q)'(x) \\ &= (3x + 1)p(x) + \lambda(3x + 1)q(x) - x^2(p)'(x) - \lambda x^2 q'(x) \\ &= (3x + 1)p(x) - x^2(p)'(x) + \lambda\left((3x + 1)q(x) - x^2q'(x)\right) \\ &= g(p) + \lambda g(q) \end{aligned}$$

donc $g$ est une application linéaire.

(b)

- Soit $p \in \mathcal{F}$. Ainsi, $p(0) = 0$. On a donc :
$$g(p)(0) = (0+1)p(0) - 0^2 p'(0) = p(0) = 0$$
donc $g(p)(0) = 0$.
- La fonction $g(p)$ est *a priori* de degré inférieur à 4 mais le terme en $x^4$ est nul. En effet, si $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ alors $g(p)(x) = (3x+1)(ax^3 + bx^2 + cx + d) - x^2(3ax^2 + 2bx + c) = x^4(3a - 3a) + \dots$.
Ainsi, $g(p)$ est de degré inférieur ou égal à 3.

(c) D'après la question précédente, si $p \in \mathcal{F}$, alors $g(p) \in \mathcal{F}$ car $g(p) \in \mathcal{E}$ et $g(p)(0) = 0$ donc $g$ est une application linéaire de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ donc $g$ est un endomorphisme de $\mathcal{F}$.

(d) On a
- $g(f_3)(x) = (3x+1)x^3 - x^2 3x^2 = 3x^4 + x^3 - 3x^4 = x^3 = f_3(x)$, soit $g(f_3) = f_3$.
- $g(f_2)(x) = (3x+1)x^2 - x^2 2x = 3x^3 + x^2 - 2x^3 = f_3(x) - 2f_2(x)$, soit $g(f_2) = f_3 - 2f_2$.
- $g(f_1)(x) = (3x+1)x - x^2 = 3x^2 - x^2 + x = 2x^2 + x = 2f_2(x) + f_1(x)$, soit $g(f_1) = 2f_2 + f_1$.

Ainsi, on a (attention à l'ordre des vecteurs) :
$$Mat_{(f_3,f_2,f_1)}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T.$$

(e) Comme $T$ est la matrice de $g$ dans la base $\mathcal{H} = (f_3, f_2, f_1)$, $T^n$ est la matrice de $g^n$ dans la base $\mathcal{H}$.

D'autre part, les coordonnées de $f_1$ dans la base $\mathcal{H} = (f_3, f_2, f_1)$ sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a alors, d'après la question **??** :
$$T^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n(n-1) \\ 2n \\ 1 \end{pmatrix}$$
ce qui donne
$$g^n(f_1) = n(n-1)f_3 + 2nf_2 + f_1$$
soit
$$g^n(f_1)(x) = n(n-1)x^3 + 2nx^2 + x.$$

# Exercice 3 - D'après EDHEC 2018

*Une solution proposée et rédigée par Marylène Dudognon et Laurent Foubert.*

On considère la fonction $f$ qui à tout réel $x$ associe : $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln\left(1+t^2\right) dt$.

## Partie I : Étude de $f$

(1) (a) Utilisons le théorème de positivité des intégrales.
- Premier cas : si $x \geqslant 0$.
  - $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  - $\forall t \in \mathbb{R}, \ln(1+t^2) \geqslant 0$
  - $0 \leqslant x$

  Ainsi, d'après le théorème de positivité de l'intégrale,
$$f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

- Deuxième cas : si $x \leqslant 0$.
  - $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  - $\forall t \in \mathbb{R}, \ln(1+t^2) \geqslant 0$
  - $x \leqslant 0$

  Ainsi, d'après le théorème de positivité de l'intégrale,
  $$\int_x^0 \ln(1+t^2)\mathrm{d}t \geqslant 0$$
  donc
  $$f(x) = \int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

Ainsi, $f$ est positive sur $[0;+\infty[$ et négative sur $]-\infty;0]$.

(b) D'après le **théorème fondamental de l'analyse**, $f$ est LA primitive de $t \mapsto \ln(1+t^2)$ qui s'annule en 0. Or, $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $f$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \ln(1+x^2)$.

(c) Signe de $f'(x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |

Ainsi, $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(2) (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$f(-x) = \int_0^{-x} \ln(1+t^2)\mathrm{d}t.$$
Utilisons le changement de variable $u = -t$, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$. On obtient :
$$f(-x) = \int_0^x \ln(1+(-u)^2)(-\mathrm{d}u) = -\int_0^x \ln(1+u^2)\mathrm{d}u = -f(x).$$
Ainsi, $f$ est impaire.

(b) $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $f''(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

Ainsi, $f$ est concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $[0;+\infty[$. Elle admet un point d'inflexion au point de coordonnées $(0;0)$.

(3) (a) Soient $a$ et $b$ deux réels tels que :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2} \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \frac{t^2}{1+t^2} = \frac{at^2+(a+b)}{1+t^2}.$$
Par identification, on doit avoir : $\begin{cases} a = 1 \\ a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

Ainsi, $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \dfrac{t^2}{1+t^2} = 1 - \dfrac{1}{1+t^2}}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+t^2)dt$. Posons alors :

$$u'(t) = 1 \qquad u(t) = t$$
$$v(t) = \ln(1+t^2) \quad v'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$ donc à l'aide d'une intégration par parties,
$f(x) = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^x - \int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = x\ln(1+x^2) - 2\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$
Or d'après la question précédente,
$\int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = x - \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$
Ainsi,

$$f(x) = x\ln(1+x^2) - 2\left(x - \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt\right) = x(\ln(1+x^2)-2) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

(4) Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

(a) On observe que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

est une intégrale impropre en $+\infty$.

- $\frac{1}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$
- $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sont continues et positives sur $[1;+\infty[$.
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est convergente (intégrale de Riemann)

Ainsi, d'après les critères de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$ est convergente.
De plus, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0;1]$.
Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

est convergente.

(b) Nous avons démontré à la question 3)b) que $f(x) = x(\ln(1+x^2)-2) + 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$.Or,
$\lim_{x\to+\infty} x(\ln(1+x^2)-2) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ est finie d'après la question précédente.
Ainsi, $2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ est négligeable devant $x(\ln(1+x^2)-2)$ au voisinage de $+\infty$.
Ainsi, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x(\ln(1+x^2)-2)$. Puis, $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x\ln(1+x^2)$.

(c) Soit $x$ un réel strictement positif, on a

$$\ln(1+x^2) = \ln\left(x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right) = \ln(x^2) + \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right) = 2\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$

Or, $\lim_{x\to+\infty} 2\ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$ donc $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = o(2\ln(x))$ au voisinage de $+\infty$, donc

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2x\ln(x).$$

(d) De la même façon, si $x<0$, $f(x) = \ln(x^2) + \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right)$ donc $f(x) \underset{-\infty}{\sim} \ln(x^2) = 2\ln(-x)$

5) Recherche d'un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.

a) $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$ donc $f$ est de classe $C^3$ sur $\mathbb{R}$.

b) $f(0)=0$, $f'(0)=0$, $f''(0)=0$ d'après les calculs précédents. D'autre part, $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(3)}(x) = \dfrac{2(1+t^2)-4t^2}{(1+t^2)^2} = \dfrac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$. Ainsi, $f^{(3)}(0)=2$.

c) Ainsi, d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 au voisinage de 0, $f(x) = \dfrac{x^3}{3!}.2 + o(x^3) = \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ donc $\boxed{f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{x^3}{3}}$

## Partie II - Étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt$.

7) a) Si on considère l'expression générale de $u_n$, $u_0 = \displaystyle\int_0^1 1dt = 1$ ce qui est cohérent avec la valeur de $u_0$ donnée.

b) $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)dt = f(1)$

8) a) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1}-u_n = \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^{n+1} dt - \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt = \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n (\ln(1+t^2)-1)dt$$

- $\forall t \in [0;1]$, $\left(\ln(1+t^2)\right)^n \geqslant 0$ et $\ln(1+t^2)-1 \leqslant 0$
  (en effet, $t \in [0;1] \Rightarrow 0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2) \Rightarrow \ln(1+t^2)-1 \leqslant 0$)
  ainsi, $\forall t \in [0;1], \quad \left(\ln(1+t^2)\right)^n (\ln(1+t^2)-1) \leqslant 0$.
- $t \mapsto \left(\ln(1+t^2)\right)^n (\ln(1+t^2)-1)$ est continue sur $[0;1]$.

Ainsi, d'après la positivité de l'intégrale, $u_{n+1}-u_n \leqslant 0$ et $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt$. Or,

- $\forall t \in [0;1]$, $\left(\ln(1+t^2)\right)^n \geqslant 0$
- $t \mapsto \left(\ln(1+t^2)\right)^n$ est continue sur $[0;1]$.

Ainsi, d'après la positivité de l'intégrale, $u_n \geqslant 0$ et $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est minorée par 0.}}$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge. (théorème de convergence des suites monotones)

9) a) Soit $t \in [0;1]$. On alors :
$0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2) \Rightarrow 0 \leqslant \left(\ln(1+t^2)\right)^n \leqslant (\ln 2)^n$.
Ot $t \mapsto \left(\ln(1+t^2)\right)^n$ est continue sur $[0;1]$ donc en intégrant, on obtient :
$0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^n dt \leqslant \int_0^1 (\ln(2))^n dt$ soit $\boxed{0 \leqslant u_n \leqslant (\ln 2)^n}$

b)
- On a : $0 \leqslant u_n \leqslant (\ln 2)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln 2)^n = 0$ donc d'après le théorème de l'encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$
- On a : $0 \leqslant u_n \leqslant (\ln 2)^n$ et la série de terme général $(\ln 2)^n$ converge en tant que série géométrique car $|\ln(2)| < 1$. Ainsi, d'après les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$

10) a) Montrer que : Soit $t \in [0;1]$. On a alors :

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(2) \quad &\Rightarrow \quad 1-\ln(2) \leqslant 1-\ln(1+t^2) \leqslant 1 \\
&\Rightarrow \quad 1 \leqslant \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{1}{1-\ln(2)} \\
&\Rightarrow \quad 0 \leqslant \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(2)} \text{ car } (\ln(1+t^2))^n \geqslant 0 \\
&\Rightarrow \quad 0 \leqslant \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} dt \leqslant \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(2)} dt \text{ les fonctions sont continu} \\
&\Rightarrow \quad \int_0^1 0 \leqslant \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{1}{1-\ln(2)} \int_0^1 (\ln(1+t^2))^n dt \\
&\Rightarrow \quad 0 \leqslant \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{u_n}{1-\ln(2)}
\end{aligned}$$

b) On a :

$0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} dt \leqslant \frac{u_n}{1-\ln 2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ donc d'après le théorème de l'encadrement,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} dt = 0}$$

c) Soit $n$ un entier naturel non nul :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} u_k &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 \left(\ln(1+t^2)\right)^k dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (\ln(1+t^2))^k\right) dt \text{ linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_0^1 \frac{1-(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} dt \text{ somme des termes d'une suite géométrique}
\end{aligned}$$

d) Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1-(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} dt - \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} \mathrm{d}t.$$

Or d'après la question 10)b),

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{(\ln(1+t^2))^n}{1-\ln(1+t^2)} \mathrm{d}t = 0$$

donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} \mathrm{d}t$$

soit

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \int_0^1 \frac{1}{1-\ln(1+t^2)} \mathrm{d}t.$$