Concours Blanc n°4 - type EDHEC

Lundi 18 Mars 2019
Durée : 4 heures

Exercice 1

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée, donnant pile avec la probabilité $p = 1/2$ et face avec la probabilité $q = 1 - p = 1/2$.
On s'intéresse aux successions de lancers amenant un même côté.

On dit que la première série est de longueur k (avec $k \in \mathbb{N}^*$) si les k premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(k+1)$-ième l'autre côté.
De même, la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédant un changement de côté. On définit de même les séries suivantes.
Pour tout i de $\mathbb{N}^*$, on note P_i (resp. F_i) l'événement : " le i-ième lancer amène pile (resp. face) ".
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note N_n la variable aléatoire égale au nombre de séries obtenus lors des n premiers lancers.

Par exemple, si les lancers successifs donnent : $FFPPPPFFPPP\dots$ (F désignant face et P désignant pile), on a pour une telle succession :

$$N_1 = N_2 = 1; \quad N_3 = \cdots = N_6 = 2; \quad N_7 = N_8 = 3; \quad N_9 = \cdots = N_{11} = 4$$

les données précédentes ne permettant pas de déterminer N_{12}.

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Justifier que $N_n(\Omega) = [\![1; n]\!]$.
   (b) Calculer les probabilités $P(N_n = 1)$ et $P(N_n = n)$.

(2) (a) Déterminer les lois des variables aléatoires N_1 et N_2 et calculer leurs espérances.
   (b) Déterminer la loi de N_3 puis vérifier que $E(N_3) = 2$.

(3) Simulation informatique sous `SciLab`.
   (a) Écrire une fonction `y=lancer(p)` qui simule un lancer d'une pièce en renvoyant 1 si on obtient pile (avec probabilité $p \in]0; 1[$) et 0 si on obtient face (avec probabilité $q = 1 - p$).
   (b) Compléter la fonction suivante qui, étant donnés un entier n de $\mathbb{N}^*$, simule n lancers de la pièce et renvoie la valeur de N_n obtenue. *On rappelle que dans cet exercice p vaut* $1/2$.

```
function N = Simule_N(n) :
    // Simulation des n lancers stockés dans le vecteur L
    L = zeros(1,n)
    for k = [1:n] do
        L(k) = ............
    end
    // Calcul de la valeur de Nn stockée dans la variable N
    N = .........
    for i = [2:n] do
        if L(......) <> L(......) then
            N = .........
        end
    end
endfunction
```

(4) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout s de $[0;1]$

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)s^k.$$

La fonction G_n s'appelle fonction génératrice de la variable N_n.

(a) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $G_n(0)$ et $G_n(1)$.

(b) Montrer que $G_n'(1) = E(N_n)$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant un système complet d'évènements associé à la variable N_n, montrer que :

$$\forall k \in [\![1; n+1]\!], \quad P(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P(N_n = k) + \frac{1}{2}P(N_n = k-1).$$

(d) En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall s \in [0;1]$,

$$G_{n+1}(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right) G_n(s).$$

(e) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout s de $[0;1]$,

$$G_n(s) = s \cdot \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}.$$

(f) En déduire, à l'aide de la question 4b, que le nombre moyen de séries lors des n premiers lancers est $(n+1)/2$.

(g) On considère la fonction suivante.

```
function EN = Esp_N(n)
    R = zeros(1,10000)
    for j = [1:10000] do
        R(j) = Simule_N(n)
    end
    EN = mean(R)
endfunction
```

Quelle valeur peut-on s'attendre à obtenir lors de l'appel de `Esp_N(10)` ?

Exercice 2

Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y.$$

(1) (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
(b) Calculer les dérivées partielles premières de f.
(c) En déduire que le seul point critique de f est $A = (1/6; 1/6)$.

(2) (a) Calculer les dérivées partielles secondes de f.
(b) Montrer que f présente un minimum local en A et donner la valeur m de ce minimum.

(3) (a) Développer

$$2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2.$$

(b) En déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

(4) On considère la fonction g définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y.$$

(a) Utiliser la Question (3) pour établir que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad g(x, y) \geq -\frac{1}{6}.$$

(b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Exercice 3

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ dont la base canonique est notée $\mathcal{B} = (1, X, X^2, ..., X^n)$ et l'application Φ qui à un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme

$$\Phi(P) = P(X) - (X-1)P'(X) + \frac{(X-1)^2}{2}P''(X).$$

(1) Dans cette question, on se place dans le cas où $n = 3$.
(a) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.
(b) Déterminer la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$.
(c) Quel est le rang de Φ? En déduire une base de son noyau.
(d) Déterminer le spectre de Φ.
(e) En considérant $\Phi((X-1)^3)$, montrer que Φ est diagonalisable.

(2) On revient au cas général $n \geq 3$.
(a) Justifier que la famille $\mathcal{F} = (1, (X-1), (X-1)^2, ..., (X-1)^n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
(b) Déterminer l'image par Φ de chaque élément de la base $\mathcal{F}$. Que représentent alors ces vecteurs pour l'endomorphisme Φ?
(c) Expliciter le spectre de Φ.
(d) Montrer que la fonction $x \mapsto 1 - x + x(x-1)/2$ est strictement croissante sur $[3/2; +\infty[$.
(e) En déduire le nombre de valeurs propres distinctes de Φ.

Problème

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\mathrm{d}x.$$

Partie I - Étude d'une suite d'intégrales

(1) Justifier que la suite (I_n) est bien définie.
(2) Proposer un script `SciLab` utilisant la méthode de Monte-Carlo permettant de calculer une valeur approchée de I_n, où n est entré par l'utilisateur.
(3) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
(4) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n}.$$

(5) Établir, pour tout entier $n \geq 2$

$$\frac{1}{n} \leq 2I_n \leq \frac{1}{n-1}.$$

(6) En déduire un équivalent simple de I_n quand n tend vers l'infini.
(7) Calculer I_1.
(8) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que

$$I_n = (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right).$$

(9) Compléter cet autre programme `SciLab` permettant cette fois de calculer et d'afficher la valeur exacte de I_n où n est entré par l'utilisateur

```
n=input('n=?')
I=..................
for k=2:n
    I=.............
end
disp(I)
```

Partie II - Étude d'une suite de fonctions

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = \frac{1}{I_n}$ et f_n l'application définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{a_n}{t^n(1+t)}, & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

(10) À l'aide du changement de variable $u = 1/x$, établir pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel $x \geq 1$,

$$\int_1^x \frac{1}{t^n(1+t)}\mathrm{d}t = \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\mathrm{d}u.$$

(11) Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n peut être considérée comme une densité de probabilité.

Dans toute la suite, on note X_n une variable aléatoire dont f_n est une densité et F_n sa fonction de répartition.

(12) Pour quelles valeurs de n la variable aléatoire X_n admet-elle une espérance ? Exprimer, le cas échéant, celle-ci en fonction de I_n et I_{n-1}.

(13) (a) Soit un réel $x > 1$. Justifier l'encadrement

$$0 \leq \int_{1/x}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2} \mathrm{d}u \leq \frac{1}{n+1}.$$

(b) En déduire la valeur de

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_{1/x}^{1} \frac{u^{n-1}}{1+u} \mathrm{d}u \right).$$

(c) À l'aide d'une intégration par parties en déduire que, pour tout $x > 1$,

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 1.$$

(d) Montrer alors que la suite de variables aléatoires (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire que l'on précisera.