ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Concours Blanc n°4 - type EDHEC

Solution

Exercice 1

Un exercice et une solution proposés par Sofiane Akkouche, inspiré d'un exercice de concours de la voie BCPST.

(1) **Soit $n \in \mathbb{N}^*$.**

(a) **Justifier que $N_n(\Omega) = [\![1; n]\!]$.**
En obtenant toujours le même côté lors des n lancers, on n'aura qu'une seule série donc $N_n = 1$. Inversement, si chaque tirage donne la face opposée au tirage précédent, on aura $N_n = n$. Toutes les situations intermédiaires étant possibles, on a : $N_n(\Omega) = [\![1; n]\!]$.
Remarque : ce raisonnement n'est pas très rigoureux. Il faudrait faire une récurrence pour montrer ce résultat proprement.

(b) **Calculer les probabilités $P(N_n = 1)$ et $P(N_n = n)$.**
L'évènement $(N_n = 1)$ signifie qu'on a qu'une seule série lors des n premiers tirages donc :

$$(N_n = 1) = (P_1 \cap \cdots \cap P_n) \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_n)$$

ce qui donne par incompatibilité puis par indépendance :

$$P(N_n = 1) = P(P_1 \cap \cdots \cap P_n) + P(F_1 \cap \cdots \cap F_n) = P(P_1) \dots P(P_n) + P(F_1) \dots P(F_n) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

De même, $(N_n = n)$ signifie qu'on alterne de face à chaque tirage donc :

$$(N_n = n) = (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \dots) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \dots)$$

ce qui donne par incompatibilité puis par indépendance :

$$P(N_n = n) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

(2) (a) **Déterminer les lois des variables aléatoires N_1 et N_2 et calculer leurs espérances.**

- $N_1(\Omega) = \{1\}$ donc $P(N_1 = 1) = 1$ et $E(N_1) = 1$.
- $N_2(\Omega) = \{1, 2\}$.
  On a d'après la question 1b : $P(N_2 = 1) = P(N_2 = 2) = \dfrac{1}{2}$ et $E(N_2) = 1 \cdot \dfrac{1}{2} + 2 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$.

(b) **Déterminer la loi de N_3 puis vérifier que $E(N_3) = 2$.** $N_3(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.

On a d'après la question 1b : $P(N_3 = 1) = P(N_2 = 3) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.

On en déduit que $P(N_3 = 2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ puis que $E(N_3) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 2$.

(3) **Simulation informatique.**

(a) **Écrire une fonction `lancer(p)` qui simule un lancer d'une pièce en renvoyant 1 si on obtient pile (avec probabilité $p \in]0; 1[$) et 0 si on obtient face (avec probabilité $q = 1 - p$).**

```
function res = lancer(p) :
     if rand()<p then
         res = 1
     else
         res = 0
     end
endfunction
```

(b) **Compléter la fonction suivante qui, étant donnés un entier n de $\mathbb{N}^*$, simule n lancers de la pièce et renvoie la valeur de N_n obtenue. *On rappelle que dans cet exercice p vaut $1/2$.***

```
function N = Simule_N(n) :
    // Simulation des n lancers stockés dans le vecteur L
    L = zeros(1,n)
    for k = [1:n] do
        L(k) = lancer(0.5)
    end
    // Calcul de la valeur de Nn stockée dans la variable N
    N = 1
    for i = [2:n] do
        if L(i-1) <> L(i) then      // Le symbole <> signifie " différent "
            N = N + 1
        end
    end
endfunction
```

(4) **On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout s de $[0; 1]$: $G_n(s) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)s^k$.
La fonction G_n s'appelle fonction génératrice de la variable N_n.**

(a) **Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $G_n(0)$ et $G_n(1)$.**

On a :

- $G_n(0) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)0^k = 0$
- $G_n(1) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)1^k = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k) = 1$ car $\{(N_n = k) : k \in [\![1; n]\!]\}$ forme un s.c.e

(b) **Montrer que $G'_n(1) = E(N_n)$.**

La fonction G_n est dérivable comme somme de fonctions dérivables et on a pour tout s de $[0; 1]$:

$$G'_n(s) = \left(\sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)s^k \right)' = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)ks^{k-1}$$

On a donc en évaluant en $s = 1$: $G'_n(1) = \sum_{k=1}^{n} kP(N_n = k) = E(N_n)$.

(c) **Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant un système complet d'évènements associé à la variable N_n, montrer que :**

$$\forall k \in [\![1; n+1]\!], \quad P(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P(N_n = k) + \frac{1}{2}P(N_n = k-1).$$

$\{(N_n = i) : i \in [\![1; n]\!]\}$ forme un s.c.e donc d'après la FPT, on a :

$$\begin{aligned} P(N_{n+1} = k) &= \sum_{i=1}^{n} P(N_n = i)P_{(N_n=i)}(N_{n+1} = k)) \\ &= P(N_n = k-1)P_{(N_n=k-1)}(N_{n+1} = k)) + P(N_n = k)P_{(N_n=k)}(N_{n+1} = k)) \end{aligned}$$

car tous les autres termes de la somme sont nuls. En effet, si on obtient $k-2$ séries ou moins lors des n premiers lancers, on ne pourra en obtenir k avec un lancer de plus et si on obtient $k+1$ séries ou plus lors des n premiers lancers, on ne pourra en obtenir k avec un lancer de plus.
D'autre part, on a :

- $P_{(N_n=k-1)}(N_{n+1} = k)) = P(P_nF_{n+1} \cup F_nP_{n+1}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ car il s'agit d'obtenir une série de plus, donc de changer de face.
- De même, $P(N_n = k)P_{(N_n=k)}(N_{n+1} = k)) = P(P_nP_{n+1} \cup F_nF_{n+1}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ car il s'agit d'obtenir le même nombre de série, donc de ne pas changer de face.

Ainsi, on a bien : $\forall k \in [\![1; n+1]\!], \quad P(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P(N_n = k) + \frac{1}{2}P(N_n = k-1).$

(d) **En déduire :** $\forall n \in \mathbb{N}^*$**,** $\forall s \in [0; 1]$**,** $G_{n+1}(s) = \dfrac{1+s}{2}G_n(s)$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall s \in [0; 1]$

$$\begin{aligned} G_{n+1}(s) &= \sum_{k=1}^{n+1} P(N_{n+1} = k)s^k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{2}P(N_n = k) + \frac{1}{2}P(N_n = k-1)\right) s^k \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} P(N_n = k)s^k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} P(N_n = k-1)s^k \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)s^k + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} P(N_n = i)s^{i+1} \quad \text{car } P(N_n = n+1) = 0 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)s^k + \frac{s}{2}\sum_{i=1}^{n} P(N_n = i)s^{i} \quad \text{car } P(N_n = 0) = 0 \\ &= \frac{1}{2}G_n(s) + \frac{s}{2}G_n(s) \\ G_{n+1}(s) &= \frac{1+s}{2}G_n(s) \end{aligned}$$

(e) **En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout s de $[0; 1]$:** $G_n(s) = s \cdot \left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{n-1}$**.**

Montrons ce résultat par récurrence.

- Pour $n = 1$.
  $G_1(s) = \sum_{k=1}^{1} P(N_1 = k)s^k = P(N_1 = 1)s = s$ et $s \cdot \left(\dfrac{1+s}{2}\right)^{1-1} = s$ donc la propriété est vraie au rang 1.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $G_n(s) = s \cdot \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}$. On a alors d'après la question précédente :

$$G_{n+1}(s) = \frac{1+s}{2} G_n(s) = \frac{1+s}{2} s \cdot \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} = s \cdot \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n}$$

donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

d'où le résultat.

(f) **En déduire, à l'aide de la question 4b, que le nombre moyen de séries lors des n premiers lancers est $\frac{n+1}{2}$.**
D'après la question 4b, on a $E(N_n) = G_n'(1)$.
Calculons $Gn'(x)$. On a d'après la formule de la question précédente :

$$G_n'(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} + s \cdot (n-1)\frac{1}{2}\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2}$$

donc

$$G_n'(1) = \left(\frac{2}{2}\right)^{n-1} + \frac{n-1}{2}\left(\frac{2}{2}\right)^{n-2} = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Ainsi, le nombre moyen de séries lors des n premiers lancers est $\frac{n+1}{2}$.

(g) **On considère la fonction suivante.**

```
function EN = Esp_N(n)
    R = zeros(1,10000)
    for j = [1:10000] do
        R(j) = Simule_N(n)
    end
    EN = mean(R)
endfunction
```

Quelle valeur peut-on s'attendre à obtenir lors de l'appel de `Esp_N ( 10 )` ?
Cette fonction calcule la moyenne empirique de la variable N_n qui est proche de l'espérance de N_n soit $E(N_n) = \frac{n+1}{2}$. Ainsi, pour $n = 10$, on a $E(N_{10}) = \frac{11}{2}$ donc on obtiendra environ $EN \approx 5,5$.

Exercice 2 - D'après EDHEC 2006

Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y.$$

(1) (a) Comme la fonction f est polynomiale, elle est immédiatement de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
(b) On trouve sans difficulté

$$\partial_1 f(x,y) = 4x + 2y - 1, \quad \partial_2 f(x,y) = 4y + 2x - 1.$$

(c) On résout

$$\begin{aligned}(x,y) \text{ point critique de } f \quad &\iff \left\{\begin{array}{rcl}\partial_1 f(x,y) &=& 0\\ \partial_2 f(x,y) &=& 0\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl}4x+2y &=& 1\\ 4y+2x &=& 1\end{array}\right.\\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl}x &=& 1/6\\ y &=& 1/6\end{array}\right.\end{aligned}$$

Et il suit bien que $A=(1/6,1/6)$ est l'unique point critique de f.

(2) (a) On dérive à nouveau

$$\partial^2_{1,1} f(x,y) = 4, \quad \partial^2_{2,2} f(x,y) = 4$$

et (par le lemme de Schwarz car f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$) on a

$$\partial^2_{1,2} f(x,y) = \partial^2_{2,1} f(x,y) = 2.$$

(b) On forme alors la matrice hessienne de f au point critique A trouvé précédemment

$$H = \nabla^2 f(A) = \begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}.$$

Il suit que

$$\begin{aligned}\lambda \text{ valeur propre de } H \quad &\iff H - \lambda I \text{ non inversible}\\ &\iff \det(H-\lambda I) = 0\\ &\iff (4-\lambda)^2 - 4 = 0\\ &\iff (2-\lambda)(6-\lambda) = 0\\ &\iff \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 6\end{aligned}$$

Ainsi, H admet deux valeurs propres strictement positives et f présente donc un minimum local m en A. Ce minimum vaut

$$m = f(A) = f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{6}.$$

(3) (a) Sans difficulté

$$\begin{aligned}2\left(x+\frac{y}{2}-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y-\frac{1}{6}\right)^2 \quad &= \quad 2\left(x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{1}{16}+xy-\frac{x}{2}-\frac{y}{4}\right)+\frac{3}{2}\left(y^2-\frac{y}{3}+\frac{1}{36}\right)\\ &= \quad 2x^2+2y^2+2xy-x-y+\frac{1}{6}\\ &= \quad f(x,y)-m\end{aligned}$$

(b) Une somme de carrés étant positive ou nulle, on a, d'après le calcul précédent, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$f(x,y)-m \geq 0 \iff f(x,y) \geq m$$

ou encore que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

(4) On considère la fonction g définie pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x,y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y.$$

(a) On remarque immédiatement que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$g(x,y) = f\left(e^x, e^y\right)$$

et par conséquent, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$g(x,y) \geq m = -\frac{1}{6}.$$

(b) Il suffit de voir que le minorant précédent est atteint. Il est clair que si (x,y) est tel que $e^x = e^y = 1/6$, alors $g(x,y) = m$. On résout alors

$$e^x = \frac{1}{6} \Longleftrightarrow x = -\ln(6).$$

Ainsi, g admet bien un minimum global, atteint en $B = (-\ln(6), -\ln(6))$.

Exercice 3

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ dont la base canonique est notée $\mathcal{B} = (1, X, X^2, ..., X^n)$ et l'application Φ qui à un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme

$$\Phi(P) = P(X) - (X-1)P'(X) + \frac{(X-1)^2}{2}P''(X).$$

(1) Dans cette question, on se place dans le cas où $n = 3$.

(a) Commençons par montrer que Φ est linéaire. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\Phi(P+\lambda Q) &= (P+\lambda Q)(X) - (X-1)[P+\lambda Q]'(X) + \frac{(X-1)^2}{2}[P+\lambda Q]''(X) \\
&= P(X) + \lambda Q(X) - (X-1)[P'(X) + \lambda Q'(X)] + \frac{(X-1)^2}{2}[P''(X) + \lambda Q''(X)] \\
&= P(X) - (X-1)P'(X) + \frac{(X-1)^2}{2}P''(X) + \lambda\left(Q(X) - (X-1)Q'(X) + \frac{(X-1)^2}{2}Q''(X)\right) \\
&= \Phi(P) + \lambda\Phi(Q)
\end{aligned}$$

et Φ est bien linéaire. Il reste à voir que, si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, alors $\Phi(P)$ est encore un élément de $\mathbb{R}_3[X]$. Comme le produit de polynômes, les dérivées successives de polynômes et les combinaisons linéaires de polynômes sont encore des polynômes, il est clair que $\Phi(P) \in \mathbb{R}[X]$. Il reste à vérifier que le degré est bien inférieur ou égal à 3. Si $\deg(P) \leq 3$, alors $\deg(P') \leq 2$ et $\deg(P'') \leq 1$. Donc

$$\deg((X-1)P'(X)) \leq 1 + 2 = 3, \qquad \deg\left(\frac{(X-1)^2}{2}P''(X)\right) \leq 2 + 1 = 3$$

et le degré d'une somme de polynômes est un polynôme de degré au plus égal au maximum des degrés des polynômes sommés, donc on a bien $\deg(\Phi(P)) \leq 3$ et Φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

(b) On détermine les images par Φ des 4 vecteurs de la base canonique

$$\begin{aligned}\Phi(1) &= 1-(X-1)\cdot 0+\frac{(X-1)^2}{2}\cdot 0\\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi(X) &= X-(X-1)\cdot 1+\frac{(X-1)^2}{2}\cdot 0\\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi(X^2) &= X^2-(X-1)\cdot 2X+\frac{(X-1)^2}{2}\cdot 2\\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi(X^3) &= X^3-(X-1)\cdot 3X^2+\frac{(X-1)^2}{2}\cdot 6X\\ &= X^3-3X^3+3X^2+(X^2-2X+1)\cdot 3X\\ &= X^3-3X^2+3X\end{aligned}$$

ce qui donne

$$A=\mathrm{Mat}(\Phi,\mathcal{B})=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&3\\0&0&0&-3\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

(c) Le rang de Φ est la dimension de l'image de Φ, engendrée par les colonnes de sa matrice ci-dessus. Comme les trois premières colonnes sont les mêmes, on peut n'en garder deux (la première et la dernière). Comme ces deux derniers colonnes ne sont pas colinéaires, elles forment une base de l'espace qu'elles engendrent et on a

$$\mathrm{rg}(\Phi)=2.$$

Par le théorème du rang, on peut alors conclure que le noyau de Φ est de dimension 2. Il suffit donc, pour en exhiber une base, de trouver deux vecteurs non colinéaires qui en sont des éléments. On les trouve à partir des colonnes de la matrice ci-dessus. en effet,

$$\Phi(X)=\Phi(1)\iff\Phi(X-1)=0,\qquad \Phi(X^2)=\Phi(1)\iff\Phi(X^2-1)=0.$$

Comme clairement $(X^2-1,X-1)$ est libre (degrés échelonnés), on a une base du noyau

$$\mathrm{Ker}(\Phi)=\mathrm{Vect}\left(X-1,X^2-1\right).$$

(d) La matrice de Φ dans la base canonique est triangulaire supérieure; ses coefficients diagonaux sont ses valeurs propres. On en déduit que

$$\mathrm{Sp}(\Phi)=\{0;1\}.$$

(e) Il n'y a que deux valeurs propres. Pour que Φ soit diagonalisable, il faut que la somme des dimensions des deux sous-espaces propres correspondants soit égale à 4. On connait déjà la dimension du noyau (sous-espace propre associé à la valeur propre 0) qui vaut 2. Comme 1 est clairement vecteur propre associé à 1, on cherche un autre vecteur propre associé à 1 qui ne soit pas constant (et donc non colinéaire avec celui qu'on a déjà pour engendrer un espace de dimension 2 et donc obtenir que $\dim(E_1)=2$). Suivant l'indication du texte

$$\Phi((X-1)^3)=(X-1)^3-(X-1)\cdot 3(X-1)^2+\frac{(X-1)^2}{2}\cdot 6(X-1)=(X-1)^3.$$

Ainsi, on a bien ce qu'on voulait et Φ est diagonalisable. Une base de vecteur propre serait par exemple
$$\left(X-1,\ X^2-1,\ 1,\ (X-1)^3\right)$$
et dans cette base, la matrice de Φ serait
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) On revient au cas général $n \geq 3$.

(a) Les degrés sont échelonnés donc la famille est libre. Ce résultat n'est pas officiellement un résultat de cours, il faut donc l'accompagner d'une justification rapide. Le système linéaire correspondant à une liaison qui annule la famille est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont ceux de la liaison rendant la résolution immédiate.

Comme la famille est composée de $(n+1)$ vecteurs et que $\dim(R_n[X]) = n+1$, on a bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) On sait déjà que $\Phi(1) = 1$ et que $\Phi(X-1) = 0$. On a aussi $\Phi((X-1)^2) = 0$ et $\Phi((X-1)^3) = (X-1)^3$. Plus généralement, pour $k \geq 3$
$$\begin{aligned} \Phi((X-1)^k) &= (X-1)^k - (X-1)\cdot k(X-1)^{k-1} + \frac{(X-1)^2}{2}\cdot k(k-1)(X-1)^{k-2} \\ &= \left(1-k+\frac{k(k-1)}{2}\right)(X-1)^k \end{aligned}$$
Et chaque vecteur de la famille $\mathcal{F}$ est vecteur propre de Φ. En particulier, on a une base de vecteurs propres et Φ est encore diagonalisable.

(c) D'après la question précédente,
$$\mathrm{Mat}(\Phi, \mathcal{F}) = \mathrm{diag}(1, 0, 0, 1, ..., 1-k+k(k-1)/2, ..., 1-n+n(n-1)/2)$$
est diagonale. Donc ses valeurs propres sont les coefficients diagonaux et
$$\mathrm{Sp}(\Phi) = \left\{1-k+\frac{k(k-1)}{2}\ :\ k \in [\![0;n]\!]\right\}.$$

(d) On étudie brièvement la fonction $f : x \mapsto 1-x+x(x-1)/2$ polynomiale et donc dérivable sur ($\mathbb{R}$ et donc sur) l'intervalle considéré. On a $f'(x) = x - 3/2$ qui est bien strictement positive sur $]3/2;+\infty[$ rendant f strictement croissante sur $[3/2;+\infty[$.

(e) D'après la question précédente, $f(2) < f(3) < ... < f(n)$ (pour tout $n \geq 3$). Et les valeurs de ces images sont donc distinctes. Ainsi, les valeurs propres auxquelles sont associés les polynômes $(X-1)^k$ sont distinctes pour $k \geq 2$ (et il y en a $n-1$). Comme $f(0) = f(3)$ et $f(1) = f(2)$, on a donc
$$\#\mathrm{Sp}(\Phi) = \#\{f(k) :\ k \in [\![0;n]\!]\} = n-1.$$
En déduire le nombre de valeurs propres distinctes de Φ.

Problème - Inspiré de HEC 2004, série S

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note
$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\mathrm{d}x.$$

Partie I - Étude d'une suite d'intégrales

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^{n-1}/(1+x)$ est continue sur $[0;1]$ dont l'intégrale I_n est bien définie.

(2) C'est la méthode qui identifie une intégrale à l'espérance de l'image d'une v.a.r à l'aide du théorème de transfert et propose donc une valeur approchée comme moyenne empirique de l'image par cette même fonction d'un échantillon de la v.a.r susnommée. Ici, on peut voir que, notant $h_n:\ x \mapsto x^{n-1}/(1+x)$, on a $I_n = E(h_n(X))$ où $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$ suggérant le programme suivant

```
n=input('n=?')
X=grand(1, 10000, 'unf', 0,1)
Y=X.^(n-1)./(1+X) //Y=h_n(X)
I=mean(Y)
disp(I) //l'énoncé ne demandait pas d'affichage
```

(3) Pour $x \in [0;1]$, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x^{n-1} \leq x^n$. Comme $1+x \geq 0$, on obtient donc
$$0 \leq \frac{x^{n-1}}{1+x} \leq \frac{x^n}{1+x}.$$
Par positivité de l'intégrale, il suit que
$$0 \leq I_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x = I_{n+1}$$
et la suite (I_n) est bien décroissante (et minorée par 0).

(4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$\begin{aligned} I_{n+1} + I_n &= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^n}{1+x} + \frac{x^{n-1}}{1+x}\right)\mathrm{d}x \qquad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 \frac{x^{n-1}(1+x)}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

(5) Comme (I_n) décroissante, on a $I_{n+1} \leq I_n$ donc
$$\frac{1}{n} = I_{n+1} + I_n \leq I_n + I_n = 2I_n.$$
De même,
$$\frac{1}{n} = I_{n+1} + I_n \geq I_{n+1} + I_{n+1} = 2I_{n+1}$$
ce qui donne, pour $n \geq 2$,
$$2I_n = 2I_{n-1+1} \leq \frac{1}{n-1}$$
et on a bien l'encadrement voulu.

(6) Il est clair que
$$1 \leq I_n \times 2n \leq \frac{n}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
donc, par le théorème des gendarmes, le terme encadré tend vers 1 et
$$I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

(7) E asy.
$$I_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2).$$

(8) L'énoncé nous dit donc de faire une récurrence. On l'écoute.

- initialisation: Pour $n = 1$, on vient de calculer $I_1 = \ln(2)$. Or,
$$(-1)^1 \left(\sum_{k=1}^{0} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right) = -1\,(0 - \ln(2)) = \ln(2)$$
et la formule est vraie. (À noter que la somme vaut 0 car il n'y a aucun entier satisfaisant les conditions de la plage de sommation.)

- hérédité: supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on ait
$$I_n = (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right).$$
On sait alors que
$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \frac{1}{n} - I_n \\
&= \frac{1}{n} - (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right) \\
&= \frac{1}{n} + (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right) \\
&= (-1)^{n+1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} + (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right) \qquad (\text{car } (-1)^{2(n+1)} = 1) \\
&= (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln(2) \right)
\end{aligned}$$
ce qui est bien la formule au rang $n+1$ et termine la récurrence.

(9) Compléter cet autre programme `SciLab` permettant cette fois de calculer et d'afficher la valeur exacte de I_n où n est entré par l'utilisateur

```
n=input('n=?')
I=log(2)
for k=2:n
    I=1/(k-1)-I //I_k = 1/(k-1) - I_{k-1}
end
disp(I)
```

Partie II - Étude d'une suite de fonctions

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n = \frac{1}{I_n}$ et f_n l'application définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{a_n}{t^n(1+t)}, & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

(10) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 1$. On effectue, comme suggéré, le changement de variable $u = 1/t$, qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; x]$ et donc licite. Comme $t = 1/u$, on a alors

$$\mathrm{d}u = u'(t)\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \iff \mathrm{d}t = -t^2\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$$

et il suit que

$$\begin{aligned} \int_1^x \frac{1}{t^n(1+t)}\mathrm{d}t &= -\int_1^{1/x} \frac{1}{(1/u)^n(1+1/u)}\frac{\mathrm{d}u}{u^2} \\ &= \int_{1/x}^1 \frac{1}{(1/u)^{n-1}(u+1)}\mathrm{d}u \\ &= \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{u+1}\mathrm{d}u \end{aligned}$$

(11) Si $x \to +\infty$, $1/x \to 0$ et comme l'intégrale I_n est bien définie, le calcul précédent permet d'affirmer que $\int_1^{+\infty} \mathrm{d}t/(t^n(1+t)$ converge et que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^n(1+t)} = \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\mathrm{d}u = I_n \Longrightarrow \int_1^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = 1.$$

Comme f_n est nulle sur $]-\infty; 1[$, on a bien

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = 1.$$

De plus f_n est partout positive ou nulle et est continue sur $]-\infty; 1[$ (comme fonction constante) et sur $[1; +\infty[$ comme quotient de fonctions usuelles continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle n'est pas continue en 1 mais la présence d'un seul point de discontinuité ne l'empêche pas d'être bien une densité de probabilité.

Dans toute la suite, on note X_n une variable aléatoire dont f_n est une densité et F_n sa fonction de répartition.

(12) Par définition, X_n admet une espérance si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\mathrm{d}t$$

converge **absolument**. Comme $f_n(t)$ est nulle sur $]-\infty; 1[$ et que sur $[1; +\infty[$ tout est positif, la convergence absolue de l'intégrale précédente est finalement ramenée à la convergence (simple) de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} t f_n(t)\mathrm{d}t.$$

Cette intégrale est impropre en $+\infty$. Mais

$$t f_n(t) = \frac{a_n t}{t^n(1+t)} = \frac{a_n}{t^{n-1}(1+t)} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{a_n}{t^n}.$$

Par critère d'équivalence pour la convergence des intégrales de fonctions positives, X_n alors une espérance si et seulement si

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^n} \text{ converge } \iff n > 1$$

par le critère de Riemann. Ainsi, X_n admet une espérance si et seulement si $n \geq 2$. Auquel cas,

$$E(X_n) = \int_1^{+\infty} \frac{a_n \mathrm{d}t}{t^{n-1}(1+t)} = a_n \int_0^1 \frac{u^{n-2}}{1+u}\mathrm{d}u = \frac{I_{n-1}}{I_n}$$

d'après les Questions (10) et (11).

(13) (a) Soit un réel $x > 1$. Commençons par observer que, pour $u \geq 0$, on a $1 + u \geq 1$ et donc $(1+u)^2 \geq 1$, donnat

$$0 \leq \frac{u^n}{(1+u)^2} = u^n \times \frac{1}{(1+u)^2} \leq u^n.$$

Par positivité de l'intégrale,

$$0 \leq \int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2}\mathrm{d}u \leq \int_{1/x}^1 u^n \mathrm{d}u \leq \int_0^1 u^n \mathrm{d}u = \frac{1}{n+1}.$$

Observons alors que, par application du théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2}\mathrm{d}u = 0.$$

(b) On fait une intégration par parties. On pose

$$\begin{cases} f(u) &= \frac{1}{1+u} \\ g'(u) &= u^{n-1} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(u) &= -\frac{1}{(1+u)^2} \\ g(u) &= \frac{u^n}{n} \end{cases}$$

Les fonctions f est g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1/x;1]$ rendant l'IPP *licite*. On a donc

$$\begin{aligned} \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\mathrm{d}u &= \left[\frac{u^n}{n(1+u)}\right]_{1/x}^1 + \frac{1}{n}\int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} - \frac{(1/x)^n}{(1+1/x)}\right) + \frac{1}{n}\int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2}\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Or, on a déjà dit que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2}\mathrm{d}u = 0.$$

Comme $x > 1$, $0 \leq 1/x < 1$ et $(1/x)^n \to 0$. Il suit que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\mathrm{d}u\right) = 0.$$

Remarque: on pouvait aussi dire que, et on peut penser que c'est ce que suggère l'énoncé car l'IPP n'était pas indiquée,

$$0 \leq \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\mathrm{d}u = \int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2} \times \frac{1+u}{u}\mathrm{d}u \leq (1+x)\int_{1/x}^1 \frac{u^n}{(1+u)^2}\mathrm{d}u$$

et appliquer le théorème des gendarmes où on aura compris que si $1 \geq u \geq 1/x$, alors

$$\frac{u+1}{u} = 1 + \frac{1}{u} \leq 1 + x.$$

(c) Comme $f_n = 0$ sur $]-\infty; 1[$, on a , pour $x > 1$, d'après la Question (10)

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_{1}^{x} f_n(t)\mathrm{d}t = a_n \int_{1}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t^n(1+t)} = a_n \int_{1/x}^{1} \frac{u^{n-1}}{1+u}\mathrm{d}u.$$

On ne peut pas utiliser la limite obtenue à la question précédente car $a_n = 1/I_n \to +\infty$ et on a une forme indéterminée. Mais on peut reprendre l'IPP obtenue plus haut.

$$\begin{aligned} F_n(x) &= a_n \int_{1/x}^{1} \frac{u^{n-1}}{1+u}\mathrm{d}u \\ &= \frac{a_n}{n}\left(\frac{1}{2} - \frac{(1/x)^n}{1+1/x}\right) + \frac{a_n}{n}\int_{1/x}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2}\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Comme $I_n \sim 1/2n$, on a $a_n \sim 2n$ et

$$\frac{a_n}{n} \sim 2 \to 2, \; n \to +\infty.$$

Ainsi, on a bien

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 1.$$

(d) Comme $F_n(x) = 0$, pour tout $x \leq 1$, on a

$$F_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 1 \\ 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

ce qui est la fonction de répartition de la loi certaine égale à 1. Ainsi la suite de v.a. (X_n) converge en loi vers la loi certaine (constante) égale à 1:

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 1.$$