ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Concours Blanc n°4 - sujet type EML

Lundi 18 Mars 2019
Durée : 4 heures

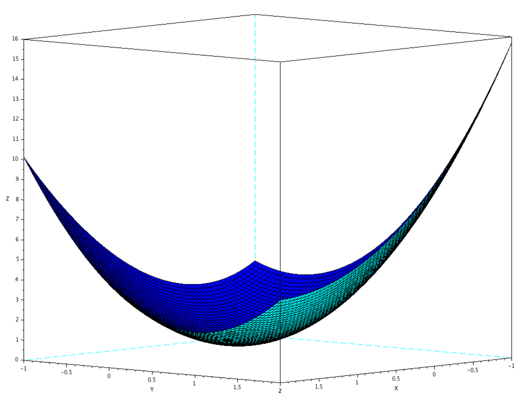
Exercice 1

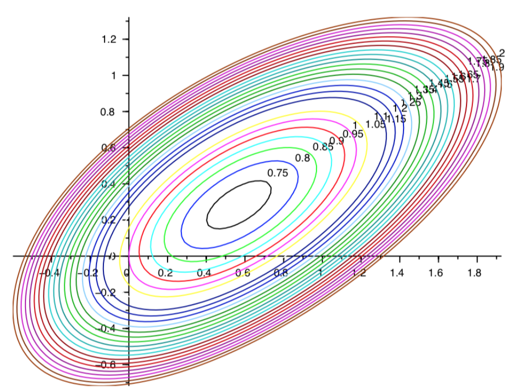
Le but de l'exercice est l'étude des extremums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}.$$

Partie I : Détermination d'extrema de f

(1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
(2) Établir que l'équation $e^{-x} = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet une solution et une seule.
(3) On a obtenu les deux figures suivantes par un script `SciLab`





(a) Que représentent ces deux graphiques?
(b) Quelles conjectures peut-on émettre sur d'éventuel(s) extremum(s) de f ?
(c) Recopier et compléter le script `SciLab` correspondant aux figures précédentes.

```
function z=f(x,y)
    z=....................
endfunction
x=.....................; y=x;
z=.....................
.........(.............) ; scf() ; //scf ouvre une nouvelle fenêtre
contour(x,y,f, [-1:.....:2])
```

(4) Montrer que (x, y) est point critique de f si et seulement si

$$x - e^{-x} = 0 \quad \text{et} \quad y = \frac{x}{2}$$

(5) En déduire que f admet un unique point critique que l'on notera (x_0, y_0).
(6) Montrer que f admet un extremum en (x_0, y_0). Est-ce un minimum ou un maximum ?

Partie II : Etude d'une fonction g

(7) On introduit la fonction g, définie sur $[0; +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}.$$

(a) Montrer que l'équation $g(x) = x$, d'inconnue $x \in [0, +\infty[$, admet une solution et une seule, que celle-ci est x_0. Montrer de plus que

$$\frac{1}{2} < x_0 < 1.$$

(b) Former le tableau des variations de g et tracer sa courbe représentative.

Partie III : Etude d'une suite récurrente (u_n)

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0, \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = g(u_n).$$

(8) Établir que la suite (u_n) est croissante et converge vers x_0.

(9) (a) Montrer que

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right], \qquad |g'(x)| \leq 0,125.$$

On donne

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0,025, \quad \text{et} \quad g'(1) \simeq -0,124.$$

(b) Établir

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |u_n - x_0| \leq (0,125)^{n-1} \cdot 0,5.$$

(c) Écrire un programme `SciLab` qui calcule et affiche une valeur approchée de x_0 à 10^{-8} près.

(10) Montrer que

$$f(x_0, y_0) = \frac{x_0^2}{2} + x_0$$

et en déduire une valeur approchée décimale à 10^{-7} près de $f(x_0, y_0)$.

Exercice 2

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Partie I : Détermination d'une racine carrée de A

(1) Compléter la construction suivante de la matrice A en `SciLab` en remplaçant les tirets par des matrices de type `ones`, `zeros` ou `diag`.

```
A= ............ + ..............
```

(2) Sans calcul, justifier que A est diagonalisable et non inversible. Déterminer le rang de A.
(3) Montrer que 0, 1 et 4 sont les trois valeurs propres de A et déterminer les sous-espaces propres associés.
(4) En déduire une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, telles que $A = PDP^{-1}$.
(5) Calculer P^{-1}.
(6) Montrer qu'il existe une matrice diagonale Δ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, telle que $\Delta^2 = D$, et déterminer Δ.
(7) On note $R = P\Delta P^{-1}$. Montrer $R^2 = A$ et calculer R.

Partie II : Étude d'endomorphismes

On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et on considère les endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans $\mathcal{B}$ sont respectivement A et R.

On note $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ la base de $\mathbb{R}^3$ telle que P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.

(8) Déterminer les matrices de f et g dans la base $\mathcal{C}$.

(9) (a) Déterminer une base et la dimension de $\ker(f)$.
(b) Déterminer une base et la dimension de $\operatorname{Im}(f)$.

(10) (a) Déterminer une base et la dimension de $\operatorname{Im}(g)$.
(b) Déterminer une base et la dimension de $\ker(g)$.

(11) Trouver au moins un automorphisme h de $\mathbb{R}^3$ tel que $g = f \circ h$.
On déterminera h par sa matrice H dans la base $\mathcal{C}$, puis on exprimera la matrice de h dans la base $\mathcal{B}$ à l'aide de H et de P.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.
Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de *Pile* obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant.
Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque *Pile* obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque *Pile* obtenu.
En particulier, s'il n'obtient aucun *Pile*, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir *Pile* est égale à p ($p \in]0, 1[$), et celle d'obtenir *Face* est de $1 - p$.
On notera X la variable aléatoire égale au nombre de *Pile* obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Enfin, on notera A l'événement : "le joueur est déclaré vainqueur" et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

Partie I

Dans cette partie et dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 3$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

(1) Reconnaître la loi de X et vérifier que $P(A) = 13/27$.
(2) Montrer que $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G.
(3) Calculer l'espérance de G. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est entier naturel non nul et $p \in]0,1[$.

Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant "À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants !", et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.

Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = (-1)^X$.
Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

(4) (a) On note $Z = (Y+1)/2$. Déterminer $Y(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.
(b) Démontrer que $E(Y) = 2P(A) - 1$.

(5) (a) Donner la loi de X.
(b) En déduire que l'on a également

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

puis que $E(Y) = (1-2p)^n$.

(6) Exprimer alors la valeur de $P(A)$ en fonction de n et p.
(7) Démontrer que

$$P(A) \geq \frac{1}{2} \iff \left[p \leq \frac{1}{2} \text{ OU "} n \text{ est pair"} \right]$$

Partie III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est à dire en faisant en sorte que $P(A) \geq 1/2$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est à dire que $E(G) \leq 0$).

(8) Exprimer G en fonction de X et Y. En déduire que

$$E(G) = 10 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k P(X = k).$$

(9) Démontrer que :

$$\forall k \in [\![1; n]\!], \quad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

(10) Montrer que $E(G) = -10np(1-2p)^{n-1}$
(11) Démontrer alors que :

$$\begin{cases} P(A) \geq \dfrac{1}{2} \\ \\ E(G) \leq 0 \end{cases} \iff p \leq \frac{1}{2}$$

(12) (a) Étudier la fonction f définie sur $[0; 1/2]$ par $f(x) = x(1-2x)^{n-1}$.

(b) Pour une valeur de n fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce (c'est à dire quelle valeur doit-il donner à $p \in [0; 1/2]$) pour optimiser la rentabilité de son activité?

Partie IV

Le forain décide de fixer $n = 2$ et $p = \dfrac{1}{4}$.

En période estivale, il pense pouvoir compter sur la participation de 200 clients dans le journée. Avant de se décider à installer son stand, il voudrait être certain, avec un risque d'erreur inférieur à 10%, qu'il gagnera plus de 100 euros dans la journée.
Pour tout entier i compris ente 1 et 200, on note alors G_i le gain algébrique du i-ième joueur.
On note aussi J la variable aléatoire égale au gain du forain sur toute la journée.

(13) Pour tout entier $i \in [\![1; 200]\!]$, donner la loi de G_i et calculer son espérance et sa variance.
(14) Exprimer la variable aléatoire J en fonction des variables aléatoires G_i.
Démontrer alors que $E(J) = 500$ et $V(J) = 11250$.

(15) Justifier que
$$P(J \leq 100) \leq P(|J - 500| \geq 400).$$
(16) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, puis montrer que : $P(J \leq 100) \leq \dfrac{9}{128}$.
(17) Compte tenu de ses exigences de rentabilité, le forain peut-il installer son stand ?