ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Libre n°1

Exercice(s) d'approfondissement
Automne 2018.

Exercice 1

Soit a un nombre strictement positif. On définit, pour tout entier naturel n:

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{a+k}{2a+k}.$$

(1) Montrer que, pour tout réel $u \in]-1;+\infty[$, on a:

$$\frac{u}{1+u} \leq \ln(1+u) \leq u.$$

(2) En déduire que

$$\exp\left(-\sum_{k=0}^{n} \frac{a}{a+k}\right) \leq P_n \leq \exp\left(-\sum_{k=0}^{n} \frac{a}{2a+k}\right)$$

(3) Montrer qu'alors la suite (P_n) est convergente et déterminer sa limite.

(4) Discuter, en fonction de a, la nature de la série de terme général P_n. (*On pourra utiliser une comparaison série-intégrale.*)

(5) Calculer la valeur de la somme lorsque $a = 2$.

(6) Dans une urne, on dispose initialement une boule rouge et une boule noire (indiscernables au toucher). On tire ensuite une boule: si elle est noire, on arrête; si elle est rouge, on la remplace dans l'urne par deux boules rouges, et on recommence jusqu'à obtention de la boule noire. Que peut-on dire du nombre moyen de tirages effectués? Et si on était parti avec deux boules de chaque couleur?

Exercice 2

Soit $n \geq 2$.

(1) Pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixés, on pose

$$\Gamma_k = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \ A^k M = A^{k-1} M\}.$$

  (a) Montrer que Γ_k est un espace vectoriel.
  (b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a: $\Gamma_k \subset \Gamma_{k+1}$.

(2) Déterminer Γ_1, Γ_2 et Γ_3 dans le cas où $n = 3$ et où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) On revient au cas général.
   (a) Montrer que si A est inversible, alors $\Gamma_1 = \Gamma_2$.
   (b) Étudier la réciproque. (*On pourra considérer une matrice dont toutes les colonnes valent* $X \in \mathrm{Ker}(A)$.)

(4) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_k = \dim(\Gamma_k)$. Montrer que la suite (u_k) est croissante et qu'il existe un unique entier p tel que

$$\forall k < p,\ u_k < u_{k+1} \quad \text{et} \quad \forall k \geq p,\ u_k = u_p.$$

Problème

Partie 1 - Préliminaires: un développement limité d'ordre n

On dit qu'une fonction f, définie au voisinage de 0, admet un *développement limité d'ordre n* en 0 si (sans surprise), il existe $n+1$ réels $a_0, a_1, ..., a_n$ tels que, au voisinage de 0, on ait

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n).$$

On **admet** qu'en cas d'existence, ce développement limité est **unique**.

(1) Montrer que la fonction $g : \ x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ admet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un développement limité d'ordre n en 0.
(2) Soit $a > 0$. Montrer, à l'aide de la question précédente, que la fonction $f_a : \ x \mapsto \dfrac{1}{x+a}$ admet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, un développement limité d'ordre n en 0 dont on explicitera les coefficients.

Partie II - Un planning de révision

Une étudiante de deuxième année se rend compte qu'elle ne dispose plus que de n (où $n \in \mathbb{N}^*$) jours de révisions avant les écrits et qu'il lui reste trois matières à réviser: les maths, l'allemand et l'ESH (notées M, A, E).

Elle décide donc de travailler chaque jour une matière en s'imposant les règles suivantes:

Règle 1: Elle peut tout à fait travailler deux jours de suite la même discipline;
Règle 2: Jamais ô grand jamais les maths et l'allemand ne doivent s'enchaîner.

Ainsi, un programme de révision sur n jours est un certain $n-$uplet de $\{M,\ A,\ E\}^n$. On note $\mathfrak{U}_n$ l'ensemble de ces $n-$uplets et u_n son cardinal, c'est à dire le nombre de plannings possibles. On pose $u_0 = 1$.

(1) Déterminer u_1 et u_2.
(2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n \leq 3^n$.
(3) En déduire qu'il existe un réel $\delta > 0$ à expliciter tel quel, pour tout $x \in]-\delta, \delta[$, la série $\sum u_n x^n$ converge. On note $S(x)$ sa somme.

(4) On note $\mathfrak{A}_n$ l'ensemble des plannings de $\mathfrak{U}_n$ qui se terminent par une journée d'ESH, $\mathfrak{B}_n$ les plannings se terminant par $ESH - Maths$ et $\mathfrak{C}_n$ les autres plannings. On a donc une réunion d'ensembles deux à deux disjoints

$$\mathfrak{U}_n = \mathfrak{A}_n \cup \mathfrak{B}_n \cup \mathfrak{C}_n.$$

(a) Construire une bijection $\sigma : \mathfrak{U}_{n-1} \to \mathfrak{A}_n$. En déduire le cardinal de $\mathfrak{B}_n$.
(b) Déterminer de manière analogue le cardinal de $\mathfrak{B}_n$.
(c) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathfrak{U}_{n-1} & \longrightarrow & \mathfrak{C}_n \\ & \omega & \longmapsto & w \end{array},$$

où

$$\forall k \in [\![1; n-1]\!],\ w_k = \omega_k \quad \text{et} \quad w_n = \left\{ \begin{array}{ll} A, & \text{si } \omega_{n-1} \in \{A, E\} \\ M, & \text{si } \omega_{n-1} = M \end{array} \right.$$

définit une bijection. En déduire le cardinal de $\mathfrak{C}_n$.
(d) Conclure que, pour tout $n \geq 2$, on a

$$u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2} \qquad (\star)$$

(5) À l'aide de la relation $(\star)$, montrer que, si $x \in]-\delta, \delta[$, $S(x)$ est solution de

$$(x^2 + 2x)S(x) = S(x) - 1 - x.$$

(6) En déduire que

$$S(x) = \frac{1 + x}{1 - 2x - x^2}$$

(7) Déterminer deux réels α, β tels que

$$\forall x \in]-\delta, \delta[, \qquad S(x) = \alpha f_{1-\sqrt{2}}(x) + \beta f_{1+\sqrt{2}}(x).$$

(8) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S(x)$ admet un développement limité d'ordre n en 0, dont on précisera les coefficients.
(9) Conclure quant à l'expression du terme général de u_n et donner un équivalent de u_n en $+\infty$.

(10) Retrouver le résultat de la dernière question en suivant le protocole d'étude des suites récurrentes linéaires d'ordre 2.