ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°1

À rendre au plus tard le 27/09

Toutes les réponses doivent êtres ***justifiées*** *et* ***soigneusement rédigées****.*

Exercice 1. (Application du cours)

(1) Déterminer un équivalent des expressions ci-dessous au point demandé et en déduire la limite en ce point

(i) $\ln(x)+e^x$ en 0; (ii) $\dfrac{2x^2+1}{1+x}$ en $-\infty$; (iii) $\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)$ en -1

(iv) $\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$ en $+\infty$; (v) $\exp\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}-1\right)-1$ en 0.

(2) Déterminer le DL à l'ordre 2 au point précisé

(i) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ en 0; (ii) $\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$ en 2; (iii) $\sqrt{1+x+x^2}-e^x$ en 0.

(3) Déterminer si $u_n=o(v_n)$ ou si $v_n=o(u_n)$

(i) $u_n=\dfrac{1}{3^n}$ et $v_n=\dfrac{1}{2^n}$; (ii) $u_n=n^{\frac{1}{n}}$ et $v_n=\left(\dfrac{1}{n}\right)^n$; (iii) $u_n=\dfrac{\ln(n)}{n}$ et $v_n=\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

Exercice 2. On considère la fonction φ définie pour $x\in]0;1[$ par $\varphi(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.

(1) Montrer que φ est prolongeable par continuité à l'intervalle $[0;1]$.
(2) Justifier que φ est dérivable sur $]0;1[$ et qu'on peut écrire, pour tout $x\in]0;1[$,

$$\varphi'(x)=\frac{h(x)}{(1-x^2)[\ln(1-x)]^2}$$

où $h(x)$ est une fonction que l'on précisera.
(3) Étudier les variations de h puis en déduire le signe de $h(x)$ sur $]0;1[$.
(4) À l'aide de développements limités d'ordre 2 en 0 de fonctions usuelles, montrer que φ est dérivable (à droite) en 0 et préciser $\varphi'(0)$. Qu'en est-il de la dérivabilité (à gauche) en 1?
(5) Dresser le tableau de variations de φ et montrer que celle-ci réalise une bijection de $[0;1]$ sur un intervalle à préciser.

(6) (***) On cherche à obtenir le DL à l'ordre 2 de φ en 0. Pour cela, on **admet** la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3).$$

(a) Donner les DL d'ordre 3 en 0 de $\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$.
(b) En factorisant par x dans le quotient et à l'aide du DL d'ordre 2 en 0 de $\frac{1}{1+u}$, montrer que, au voisinage de 0, on a

$$\varphi(x) = -1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

(c) En déduire l'équation de la (demi-)tangente à la courbe de φ en 0 et préciser leurs positions relatives.

Exercice 3. Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0;1[$. Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de *Pile* ou *Face* dont les règles sont les suivantes:

- le joueur A dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième *Pile*. On note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de *Face* alors obtenus;

- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant *Pile* avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un *Pile*. On note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de *Face* alors obtenus;

- Le joueur A gagne si son nombre de *Face* obtenus est inférieur ou égal à celui de B; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

Partie I - Étude de X

(1) Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.
(2) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $P(X = n) = (n+1)\dfrac{4}{3^{n+2}}$.
(3) Montrer que X admet une espérance et la calculer.
(4) Écrire une fonction `SciLab` d'en-tête `function x = simule_X()` qui simule la variable aléatoire X.

Partie II - Étude de Y

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B.

(1) Reconnaître la loi de Z et préciser son (ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.
(2) Justifier que $Y = Z - 1$ et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.
(3) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\quad P(Y \geq n) = (1-p)^n$.

Partie III - Un jeu équilibré

(1) Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que :

$$P(X \leq Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)P(Y \geq n).$$

(2) Déduire des résultats précédents que $P(X \leq Y) = \dfrac{4}{(2+p)^2}$.
(3) Déterminer la valeur de p pour laquelle le jeu est équilibré.