ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°1

Solution

Exercice 1. (Application du cours)

(1) On détermine un équivalent pour chacune des expressions demandées, au point précisé, ceci permettant d'en déduire la limite, ce qui, admettons le est quand même bien pratique.

$$\begin{aligned}
(i)\ \ln(x)+e^x &= \ln(x)\left(1+\frac{e^x}{\ln(x)}\right)\\
&\sim \ln(x), \quad x\to 0^+\\
&\longrightarrow -\infty, \quad x\to 0^+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii)\ \frac{2x^2+1}{1+x} &\underset{+\infty}{\sim} \frac{2x^2}{x}=2x\\
&\longrightarrow -\infty, \quad x\to -\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(iii)\ \ln\left(1+\sqrt{1+x}\right) &\underset{-1}{\sim} \sqrt{1+x} \qquad \text{(par composition car } \ln(1+u)\underset{0}{\sim} u)\\
&\longrightarrow 0, \quad x\to -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(iv)\ \ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) &= \ln\left(\frac{x^2-1+2}{x^2-1}\right)=\ln\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)\\
&\underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x^2-1} \qquad \text{(par composition car } \ln(1+u)\underset{0}{\sim} u)\\
&\underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x^2}\\
&\longrightarrow 0, \quad x\to +\infty
\end{aligned}$$

$$(v)\ \exp\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}-1\right)-1 \underset{0}{\sim} \sqrt{1+x}-\sqrt{x}-1 \qquad \text{(par composition car } e^u-1\underset{0}{\sim} u)$$

Observons, à l'aide du DL (à l'ordre 1) de $\sqrt{1+x}$ en 0 que

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{x}-1 \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x}{2}+o(x)-\sqrt{x}-1 \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2}-\sqrt{x}+o(x)=-\sqrt{x}+o\left(\sqrt{x}\right).$$

Comme $x=o(\sqrt{x}),\ x\to 0$, on obtient, au final,

$$\exp\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}-1\right)-1 \underset{x\to 0}{\sim} -\sqrt{x}$$

En particulier, il est clair que

$$\lim_{x\to 0} \exp\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{x}-1\right)-1=0.$$

(2) On utilise les DL d'ordre 2 usuels ou la formule de Taylor-Young.

$$\begin{aligned}
(i)\ \frac{e^x+e^{-x}}{2} &= \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)+1-x+\frac{(-x)^2}{2}+o((-x)^2)}{2}\\
&= \frac{2+x^2+o(x^2)}{2} = 1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\\
(ii)\ \ln(1+\sqrt{x}) &= \ln(1+\sqrt{2})+\frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}(x-2)-\frac{1}{32}\frac{\sqrt{2}+4}{(1+\sqrt{2})^2}(x-2)^2+o((x-2)^2)\\
(iii)\ \sqrt{1+x+x^2}-e^x &= 1+\frac{1}{2}(x+x^2)-\frac{1}{8}(x+x^2)^2+o((x+x^2)^2)-1-x-\frac{x^2}{2}-o(x^2)\\
&= 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{8}-1-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\\
&= -\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2).
\end{aligned}$$

(3) On peut calculer la limite de u_n/v_n

$$\begin{aligned}
(i)\ \frac{u_n}{v_n} &= \frac{2^n}{3^n}=\left(\frac{2}{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\\
u_n &= o(v_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(ii)\ \frac{u_n}{v_n} &= \frac{\exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)}{\exp(-n\ln(n))} \underset{+\infty}{\sim} \exp(n\ln(n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\\
v_n &= o(u_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(iii)\ \frac{v_n}{u_n} &= \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\\
v_n &= o(u_n)
\end{aligned}$$

Exercice 2. On considère la fonction φ définie pour $x\in]0;1[$ par $\varphi(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.

(1) Il s'agit de montrer que φ admet des limites finies aux deux extrémités. En 1, c'est l'algèbre des limites (avec $\ln(1-x)\to-\infty$) et donc $\varphi\to 0$.

En 0, on peut utiliser des limites usuelles ou (c'est un peu l'objet du chapitre) des équivalents (usuels). On écrit

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{=\sim} \frac{-x+o(x)}{x+o(x)}=\frac{-1+o(1)}{1+o(1)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -1.$$

Ainsi, φ est prolongeable par continuité à l'intervalle $[0;1]$ et on peut poser

$$\varphi(x)=\begin{cases} -1, & \text{si } x=0\\ \frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}, & \text{si } x\in]0;1[\\ 0, & \text{si } x=1\end{cases}$$

(2) La fonction φ est dérivable sur $]0;1[$ comme quotient de fonctions usuelles dérivables sur $]0;1[$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Les règles de dérivation permettent d'écrire que, pour

tout $x \in]0;1[$,

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \frac{\frac{1}{1+x}\ln(1-x)+\ln(1+x)\frac{1}{1-x}}{\ln(1-x)^2}\\ &= \frac{(1-x)\ln(1-x)+(1+x)\ln(1+x)}{(1-x^2)\ln(1-x)^2}\\ &= \frac{h(x)}{(1-x^2)[\ln(1-x)]^2},\end{aligned}$$

où on a posé

$$h(x) = (1-x)\ln(1-x)+(1+x)\ln(1+x).$$

(3) h est une combinaison de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;1[$ et on peut donc dériver autant que nécessaire pour obtenir ses variations. On a

$$h'(x) = -\ln(1-x)+\ln(1+x), \qquad h''(x) = \frac{2}{1-x^2} > 0$$

ce qui permet de dresser des variations successives menant à celles de h

x	0		1
$h''(x)$		$+$	‖
h'	0	$\nearrow$	$+\infty$
$h'(x)$		$+$	‖
h	0	$\nearrow$	$\ln(4)$

En particulier,

$$\forall x \in]0;1[, \qquad h(x) \geq 0.$$

(4) Pour montrer que φ est dérivable (à droite) en 0, on regarde la limite de son taux d'accroissement en 0^+. On a

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} &= \frac{\frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}+1}{x}\\ &= \frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x\ln(1-x)}\\ &= \frac{-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x\left(x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}\\ &= \frac{x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} = \frac{1+o(1)}{1+o(1)}\\ &\underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1.\end{aligned}$$

Ainsi, φ est dérivable (à droite) en 0 et $\varphi'(0)=1$ (on devrait écrire $\varphi'_d(0)$ mais on choisit d'alléger les notations).

En 1^-, cela ne marche pas aussi bien

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1} = \frac{\ln(1+x)}{(x-1)\ln(1-x)} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$$

par croissance comparée ($u\ln(u) \to 0,\ u \to 0$). Ainsi, φ n'est pas dérivable à gauche en 1. Graphiquement, la courbe de φ admet une demi-tangente verticale.

(5) Comme $h(x) > 0$ sur $]0;1[$ et que le dénominateur de $\varphi'(x)$ est également strictement positive, on peut conclure que h est strictement croissante sur $]0;1[$. Celle-ci étant continue sur $[0;1]$, elle est finalement strictement croissante sur $[0;1]$, et le théorème de bijection permet d'affirmer qu'elle en réalise donc une de $[0,1]$ sur $[-1;0]$ (où les extrémités de l'intervalle image sont les limites de φ aux extrémités de l'intervalle de départ). On peut dresser le tableau

x	0		1
$\varphi'(x)$		$+$	$\|$
φ	-1	$\nearrow$	0

(6) (***) On cherche à obtenir le DL à l'ordre 2 de φ en 0. Pour cela, on **admet** la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3).$$

(a) La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 admise ci-dessus permet d'écrire sans mal

$$\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3), \qquad \ln(1+x) = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

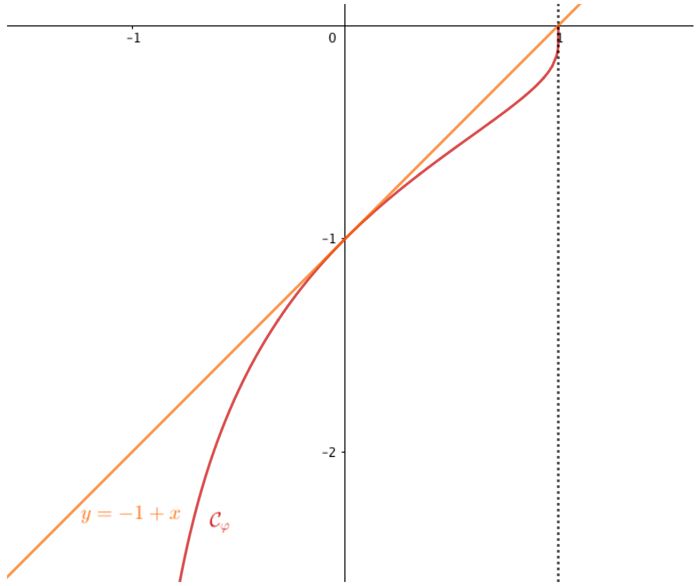
(b) C'est une manipulation de DL très instructive

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)} = \frac{-x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)} \\
&= \frac{-x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)}{x\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)} \\
&= -\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \times \frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}
\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$,

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= -\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \times \left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^2 + o((\cdots)^2)\right) \\
&= -\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \times \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{4} + o(x^2)\right) \\
&= -\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \times \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)\right) \\
&= -1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)
\end{aligned}$$

(c) Il suit de la question précédente que $y = -1 + x$ est tangente à la courbe en $x = 0$ et, au vu du signe négatif du terme de degré 2 dans le DL, la courbe de φ se trouve (localement) au-dessous de cette (demi-)tangente, comme en témoigne la figure ci-dessous.



Exercice 3. Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0;1[$. Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de *Pile* ou *Face* dont les règles sont les suivantes:

- le joueur A dispose d'une pièce amenant Pile avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième *Pile*. On note X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de *Face* alors obtenus;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant *Pile* avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un *Pile*. On note Y la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de *Face* alors obtenus;
- Le joueur A gagne si son nombre de *Face* obtenus est inférieur ou égal à celui de B; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

Partie I - Étude de X

(1) Afin de décrire les évènements mentionnés, il est nécessaire (et classique) d'introduire les évènements P_i (resp. $F_i = \overline{P}_i$) correspondants à l'obtention d'un *Pile* (resp. *Face*) lors du $i-$ème tirage. Ceci étant fait, on peut écrire

$$\begin{aligned}(X=0) &= P_1 \cap P_2\\ (X=1) &= (P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3)\\ (X=2) &= (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4)\end{aligned}$$

Par incompatibilité des différentes alternatives et indépendances des lancers, on obtient

$$P(X=0) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, \qquad P(X=1) = 2 \times \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$$

et
$$P(X=2)=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{27}.$$

(2) Il faut généraliser la méthode précédente. On peut procéder de plusieurs façons. L'une (la plus élégante et rigoureuse) revient à remarquer que si $(X=n)$ alors il y a eu $(n+2)$ lancers et que le dernier donne un *Pile* et qu'il y a donc eu n *Face* (ou de manière équivalente 1 *Pile*) lors des $(n+1)$ premiers lancers. En introduisant la v.a Z_k qui compte le nombre de *Pile* obtenus lors des k premiers lancers (et qui suit donc clairement une loi binomiale $Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}(k,2/3)$), on peut donc écrire
$$(X=n)=(Z_{n+1}=1)\cap P_{n+2},$$
et par indépendance des lancers on a
$$P(X=n)=\binom{n+1}{1}\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\times\frac{2}{3}=\frac{4(n+1)}{3^{n+2}}$$
Une autre méthode, moins classieuse consiste à écrire, avec des pointillés par exemple, les différentes alternatives (*i.e.* les positions possibles du premier *Pile*)
$$(X=n)=(P_1\cap F_2\cap\ldots\cap F_{n+1}\cap P_{n+2})\cup(F_1\cap P_2\cap F_3\cap\ldots\cap F_{n+1}\cap P_{n+2})\cup\ldots\cup(F_1\cap F_2\cap\ldots\cap F_n\cap P_{n+1}\cap P_{n+2})$$
Il y a $(n+1)$ alternatives qui ont toute la même proabilité $(2/3)^2(1/3)^n$ de se produire, donnant le résultat voulu.

(3) X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n\geq 1} nP(X=n)$ converge absolument. Comme tout est ici positif, il suffit de montrer la convergence sans la valeur absolue. On travaille sur le terme général
$$nP(X=n)=4n(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}=\frac{4}{3^3}n(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
et on reconnait le multiple du terme général d'une série géométrique dérivée (décalée) de raison $(1/3)$ donc convergente. Ainsi, X admet une espérance et on peut passer à la somme (infinie)
$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n)=\frac{4}{3^3}\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\\ &= \frac{4}{3^3}\sum_{j=2} j(j-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{j-2}\\ &= \frac{4}{3^3}\times\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3}\\ E(X) &= 1.\end{aligned}$$

(4) On propose le script suivant

```
function x = simule_X()
    x=0
    p=0 //on commence avec zéro PILE
    while p<2 //tant qu'on a moins de 2 PILE
        if rand()<2/3 then //si on a PILE
            p=p+1 //on a un PILE de plus
        else
            x=x+1 //il faut un lancer de plus
        end
    end
endfunction
```

Partie II - Étude de Y

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B.

(1) On reconnait en Z une loi géométrique (temps d'attente du premier succès), $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. (Attention, on a changé de pièce). Le cours nous permet d'affirmer, sans avoir besoin de refaire els calculs que

$$E(Z) = \frac{1}{p}, \qquad V(Z) = \frac{1-p}{p^2}.$$

(2) Le joueur s'arrête à l'obtention du premier *PILE*, le reste de ses lancers ayant nécessairement amené des *FACE*. Ainsi, il est clair que $Y = Z - 1$. Y est donc une transformation affine d'une v.a. admettant une espérance (et une variance). Le cours permet d'affirmer que Y admet les deux également et que

$$E(Y) = E(Z) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}, \qquad V(Y) = V(Z) = \frac{1-p}{p^2}.$$

(3) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, comme $Z = Y + 1$,

$$\begin{aligned} P(Y = n) &= P(Z = n+1) \\ &= (1-p)^n p. \end{aligned}$$

Mais il suit alors (et c'est un calcul facile à savoir refaire car très utile!) que

$$\begin{aligned} P(Y \geq n) &= 1 - P(Y < n) = 1 - P(Y \leq n-1) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} P(Y = k) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} (1-p)^k p \\ &= 1 - p \times \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} \\ &= (1-p)^n. \end{aligned}$$

Partie III - Un jeu équilibré

(1) En appliquant la formule des probabilités totales au s.c.e $\{(X = n) : \ n \in \mathbb{N}\}$, on obtient

$$\begin{aligned} P(X \leq Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P\left((X = n) \cap (X \leq Y)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P\left((X = n) \cap (n \leq Y)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(X = n\right) P(Y \geq n) \qquad \text{(par indépendance des v.a.)} \end{aligned}$$

(2) Il suffit de combiner la question précédente avec les résultats des deux autres parties. On obtient

$$\begin{aligned}
P(X \le Y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P\,(X = n)\, P(Y \ge n) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4(n+1)}{3^{n+2}} (1-p)^n \\
&= \frac{4}{3^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \left(\frac{1-p}{3}\right)^n \\
&= \frac{4}{3^2} \sum_{j=1}^{+\infty} j \left(\frac{1-p}{3}\right)^{j-1} \\
P(X \le Y) &= \frac{4}{(2+p)^2}.
\end{aligned}$$

(3) Le joueur A gagne si et seulement si $(X \le Y)$. Ainsi, il faut déterminer la valeur de p pour laquelle la probabilité précédente est égale à $1/2$. On résout!

$$\begin{aligned}
P(X \le Y) = \frac{1}{2} &\iff \frac{4}{(2+p)^2} = \frac{1}{2} \\
&\iff (2+p)^2 = 8 \\
&\iff p^2 + 4p - 4 = 0 \\
&\iff p = 2\sqrt{2} \pm 2 \quad (\text{et} \quad p \in [0;1]) \\
&\iff p = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1) \simeq 0.82.
\end{aligned}$$