Devoir Maison n°2

À rendre au plus tard le 18/10

*Toutes les réponses doivent êtres **justifiées** et **soigneusement rédigées**.*

Exercice 1. Montrer, en respectant le schéma d'étude proposé dans le cours, que la suite récurrente (u_n) définie par

$$u_0 = \frac{1}{2}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n + 1}$$

converge vers une limite ℓ à préciser.

Exercice 2. On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices carrées d'ordre 3 qui vérifient la propriété suivante:

$$A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le 3} \in \mathcal{E} \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{3} a_{1,j} = \sum_{j=1}^{3} a_{2,j} = \sum_{j=1}^{3} a_{3,j} = \sum_{i=1}^{3} a_{i,1} = \sum_{i=1}^{3} a_{i,2} = \sum_{i=1}^{3} a_{i,3}.$$

C'est à dire qu'une matrice est dans $\mathcal{E}$ si et seulement si la somme des coefficients de chaque ligne et celle de deux de chaque colonne est la même. On note $s(A)$ la valeur commune de ces six sommes.

On note I la matrice identité d'ordre 3 et J la matrice définie par $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) (a) Vérifier que I et J appartiennent à $\mathcal{E}$ et donner les valeurs $s(I)$ et $s(J)$.
 (b) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{E}$ et α un réel.
 Montrer que la matrice $(A + \alpha B)$ appartient à $\mathcal{E}$ et exprimer, $s(A + \alpha B)$ en fonction de $s(A)$, $s(B)$ et α.
 (c) Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel.

(2) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 (a) Calculer AJ et JA.
 (b) Montrer que A appartient à $\mathcal{E}$ si, et seulement si, $AJ = JA$.
 (c) Vérifier que si A appartient à $\mathcal{E}$, alors $AJ = s(A)J$.

(3) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{E}$.
 (a) À l'aide de la question 2b, montrer que le produit AB appartient à $\mathcal{E}$.
 (b) Établir l'égalité : $s(AB) = s(A)S(B)$.

(4) Soit A une matrice inversible appartenant à $\mathcal{E}$. On note A^{-1} la matrice inverse de A.
 (a) À l'aide de la question 2b, montrer que A^{-1} appartient à $\mathcal{E}$.
 (b) Montrer que $s(A) \neq 0$ et exprimer $s\left(A^{-1}\right)$ en fonction de $s(A)$.

(5) On note $\mathcal{F}$ le sous-ensemble des matrices M de $\mathcal{E}$ vérifiant $s(M) = 0$. On considère $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que M appartient à $\mathcal{F}$ si et seulement si M est de la forme :
$$M = \begin{pmatrix} a_{2,2} + a_{2,3} + a_{3,2} + a_{3,3} & -a_{2,2} - a_{3,2} & -a_{2,3} - a_{3,3} \\ -a_{2,2} - a_{2,3} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ -a_{3,2} - a_{3,3} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$
   (b) En déduire que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ et donner une base de $\mathcal{F}$.

(6) Soit A une matrice de $\mathcal{E}$. On pose : $B = \dfrac{1}{3} s(A) J$ et $C = A - B$.
   (a) Justifier, sans calculs, que B appartient à $\mathcal{E}$ puis que C appartient à $\mathcal{E}$.
   (b) La matrice C appartient-elle à $\mathcal{F}$?
   (c) En déduire que toute matrice A de $\mathcal{E}$ peut s'écrire comme somme d'une matrice proportionnelle à J et d'une matrice de $\mathcal{F}$.
   (d) En déduire une base de $\mathcal{E}$ et donner sa dimension.

Exercice 3. Pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$, soit M la matrice carrée d'ordre 2 définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$.

(1) Dans cette question, on choisit $a = b = -1$.
   (a) La matrice M est-elle inversible ?
   (b) Calculer pour tout entier $n \geq 2$, la matrice M^n.

(2) Dans cette question, on choisit $a = b$.
   (a) La matrice M est-elle inversible ?
   (b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a $M^n = (1 + a)^{n-1} M$.

(3) On revient au cas général où a et b sont des réels quelconques.
Montrer que la matrice M est inversible si et seulement si $a \neq b$.

(4) Dans cette question, on considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre p avec $0 < p < 1$. On pose : $q = 1 - p$.
Soit A l'événement : "la matrice N est inversible" où N est la matrice aléatoire définie par
$$N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}.$$
   (a) Établir la relation
$$P([X = Y]) = \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k]) \times P([Y = k]).$$
   (b) Calculer
$$\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2}.$$
   (c) En déduire $P(A)$ en fonction de q

(5) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Dans cette question, on considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et suivant toutes les deux la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$. Soit A l'événement: "la matrice N est inversible" où N est la matrice aléatoire définie par
$$N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}.$$
   (a) Pour x réel, écrire les développements de $(x + 1)^n$ et $(x + 1)^{2n}$ à l'aide de la formule du binôme.

(b) En utilisant l'identité

$$(x+1)^{2n} = (x+1)^n (x+1)^n,$$

montrer que l'on a :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}.$$

(c) En déduire la relation :

$$P([X=Y]) = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

(d) Calculer $P(A)$ en fonction de n.