Devoir Maison n°2

Solution

Exercice 1. Commençons par étudier brièvement la fonction

$$f\,:\; x \mapsto \frac{x^2}{2x+1}.$$

Cette fonction est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1/2\}$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x\neq -1/2$, on a

$$f'(x) = \frac{2x(2x+1)-2x^2}{(2x+1)^2} = \frac{2x(x+1)}{(2x+1)^2},$$

ce qui permet de dresser le tableau de variations

x	$-\infty$		-1		$-1/2$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

On voit en particulier que la fonction f est croissant sur $[0;+\infty[$ et que cet intervalle est stable par f. Comme $u_0 = 1/2 \geq 0$, une récurrence immédiate nous permet d'affirmer que tous les termes de la suite sont bien définis et que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_n \geq 0$. (*On aurait pu dès le départ limiter l'étude de f à $[0;+\infty[$ sachant que c'est là que se trouve le premier terme.)*

Voyant que $u_1 = f(u_0) = f(1/2) = 1/8 < u_0$, la croissance de f sur $[0;+\infty[$ permet d'obtenir, par une récurrence immédiate (que l'on vient d'initialiser) la décroissance de la suite (u_n).

La suite (u_n) est ainsi décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente d'après le théorème de convergence monotone et on note ℓ sa limite. Le passage à la limite dans les inégalités donne déjà $\ell \geq 0$. Comme $u_{n+1} = f(u_n)$, que f est continue sur $[0;+\infty[$, le passage à la limite dans la relation de récurrence donne

$$f(\ell) = \ell \iff \frac{\ell^2}{2\ell+1} = \ell \iff \ell^2 = 2\ell^2 + \ell \iff \ell = 0 \quad \text{ou} \quad \ell = -1.$$

Or, $\ell \geq 0$. En conclusion,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Exercice 2. (Inspiré de **ESCP 2012**, voie T) On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices carrées d'ordre 3 qui vérifient la propriété suivante:

$$A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le 3}\in\mathcal{E}\iff \sum_{j=1}^{3}a_{1,j}=\sum_{j=1}^{3}a_{2,j}=\sum_{j=1}^{3}a_{3,j}=\sum_{i=1}^{3}a_{i,1}=\sum_{i=1}^{3}a_{i,2}=\sum_{i=1}^{3}a_{i,3}.$$

C'est à dire qu'une matrice est dans $\mathcal{E}$ si et seulement si la somme des coefficients de chaque ligne et celle de deux de chaque colonne est la même. On note $s(A)$ la valeur commune de ces six sommes.

On note I la matrice identité d'ordre 3 et J la matrice définie par $J=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

(1) (a) Il est clair que la somme des coefficients de chaque ligne de I ou de chacune de ses colonnes est égale à 1. Ainsi, $I\in\mathcal{E}$ et $s(I)=1$. Pour J, les coefficients étant tous égaux à un, n'importe quelle somme composée de trois d'entre eux sera égale à 3. Donc $J\in\mathcal{E}$ et $s(J)=3$.

(b) Notons

$$A=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}x&y&z\\u&v&w\\r&s&t\end{pmatrix},\qquad \lambda\in\mathbb{R}.$$

Comme $A,B\in\mathcal{E}$, on sait par exemple que $a+b+c=d+e+f=...=a+d+g=s(A)$ et que $x+y+z=u+v+w=...=x+u+r=s(B)$. Mais, on observe que

$$A+\lambda B=\begin{pmatrix}\lambda a+x&\lambda b+y&\lambda c+z\\\lambda d+u&\lambda e+v&\lambda f+w\\\lambda g+r&\lambda h+s&\lambda i+t\end{pmatrix}$$

Ainsi, la somme des coefficients de la première ligne donne

$$\lambda a+x+\lambda b+y+\lambda c+z=\lambda(a+b+c)+(x+y+z)=\lambda s(A)+s(B)$$

mais celle de la deuxième ligne vaut

$$\lambda d+u+\lambda e+v+\lambda f+w=\lambda(d+e+f)+(u+v+w)=\lambda s(A)+s(B)$$

tout comme celle de la troisième ligne ou comme celle de n'importe laquelle des colonnes. Ainsi, $\lambda A+B\in\mathcal{E}$ et $s(\lambda A+B)=\lambda s(A)+s(B)$.

(c) D'après la question précédente $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, stable par combinaison linéaire. Il suffit alors d'ajouter que l'ensemble est non vide. En effet, il contient naturellement la matrice nulle (les six sommes sont toutes égales à 0). Ainsi $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et en particulier, c'est un espace vectoriel.

(2) Soit $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le 3}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
(a) On fait les calculs

$$\begin{aligned}AJ&=\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}&a_{1,3}\\a_{2,1}&a_{2,2}&a_{2,3}\\a_{3,1}&a_{3,2}&a_{3,3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3}&a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3}&a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3}\\a_{2,1}+a_{2,2}+a_{2,3}&a_{2,1}+a_{2,2}+a_{2,3}&a_{2,1}+a_{2,2}+a_{2,3}\\a_{3,1}+a_{3,2}+a_{3,3}&a_{3,1}+a_{3,2}+a_{3,3}&a_{3,1}+a_{3,2}+a_{3,3}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
JA &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{1,1}+a_{2,1}+a_{3,1} & a_{1,2}+a_{2,2}+a_{3,2} & a_{1,3}+a_{2,3}+a_{3,3} \\ a_{1,1}+a_{2,1}+a_{3,1} & a_{1,2}+a_{2,2}+a_{3,2} & a_{1,3}+a_{2,3}+a_{3,3} \\ a_{1,1}+a_{2,1}+a_{3,1} & a_{1,2}+a_{2,2}+a_{3,2} & a_{1,3}+a_{2,3}+a_{3,3} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(b) On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons que $A \in \mathcal{E}$. D'après le calcul précédent, $AJ = JA = s(A)J$.

($\Leftarrow$) Supposons que $AJ = JA$. Le calcul précédent permet l'identification des coefficients obtenus pour AJ et JA. En regardant la première ligne de chacune des deux matrices, on déduit

$$a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3} = a_{1,1}+a_{2,1}+a_{3,1} = a_{1,2}+a_{2,2}+a_{3,2} = a_{1,3}+a_{2,3}+a_{3,3}.$$

En faisant de même pour les deux autres lignes, on a bien l'égalité des six sommes caractérisant l'appartenance à $\mathcal{E}$. L'équivalence est ainsi démontrée.

(c) D'après ce qui précède, on a $A \in \mathcal{E} \Longleftrightarrow AJ = JA$, mais le calcul explicite de ces produits fait bien apparaître que dans ce cas, $AJ = JA = s(A)J$.

(3) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{E}$.

(a) Il suffit de montrer que AB commute avec J. Ce qui se fait sans effort, car on sait que A et B ont cette propriété, car elles sont dans $\mathcal{E}$ et que c'est équivalent.

$$(AB)J = A(BJ) = A(JB) = (AJ)B = (JA)B = J(AB)$$

et $AB \in \mathcal{E}$.

(b) On sait, d'après ($2c$) que $ABJ = s(AB)J$. Mais alors

$$s(AB)J = ABJ = As(B)J = s(B)AJ = s(B)s(A)J.$$

Comme J est non nulle, il suit que $s(AB) = s(A)s(B)$.

(4) Soit A une matrice inversible appartenant à $\mathcal{E}$. On note A^{-1} la matrice inverse de A.

(a) On raisonne comme précédemment en utilisant la caractérisation de l'appartenance à $\mathcal{E}$ si et seulement si on commute avec J. Commençons par observer que

$$J = A^{-1}AJ = A^{-1}JA$$

En multipliant à droite les membres aux extrémités de cette chaîne d'égalités par A^{-1}, on obtient

$$JA^{-1} = A^{-1}JAA^{-1} = A^{-1}J.$$

Donc A^{-1} commute avec J et $A^{-1} \in \mathcal{E}$.

(b) D'après ($3b$), $1 = S(I) = s(AA^{-1}) = s(A)s(A^{-1})$. Donc, $s(A) \neq 0$ et

$$s(A^{-1}) = \frac{1}{s(A)}.$$

(5)

(a) Encore une fois, on raisonne par double implication.

($\Leftarrow$) Si M est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a_{2,2}+a_{2,3}+a_{3,2}+a_{3,3} & -a_{2,2}-a_{3,2} & -a_{2,3}-a_{3,3} \\ -a_{2,2}-a_{2,3} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ -a_{3,2}-a_{3,3} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix},$$

on vérifie immédiatement, en additionnant les coefficients qui se compensent, que $M \in \mathcal{E}$ et que $s(M) = 0$, c'est à dire que $M \in \mathcal{F}$.

($\Rightarrow$) Soit $M \in \mathcal{F}$. Alors, $s(M) = 0$, c'est à dire que

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3} & = & 0 \\ a_{1,1}+a_{2,1}+a_{3,1} & = & 0 \\ a_{2,1}+a_{2,2}+a_{2,3} & = & 0 \\ a_{1,2}+a_{2,2}+a_{3,2} & = & 0 \\ a_{3,1}+a_{3,2}+a_{3,3} & = & 0 \\ a_{1,3}+a_{2,3}+a_{3,3} & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3} & = & 0 \\ a_{1,1}+a_{2,1}+a_{3,1} & = & 0 \\ a_{2,1} & = & -a_{2,2}-a_{2,3} \\ a_{1,2} & = & -a_{2,2}-a_{3,2} \\ a_{3,1} & = & -a_{3,2}-a_{3,3} \\ a_{1,3} & = & -a_{2,3}-a_{3,3} \end{array}\right.$$

En injectant les lignes (3) à (6) du système précédent dans les deux premières, on trouve aussi

$$a_{1,1} = -a_{2,1}-a_{3,1} = a_{2,2}+a_{2,3}+a_{3,2}+a_{3,3}$$

et M s'écrit bien sous la forme attendue.

(b) On constate qu'on a seulement besoin de quatre coefficient pour écrire une matrice $M \in \mathcal{F}$. En effet, d'après ce qui précède

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{F} \iff M &= \begin{pmatrix} a_{2,2}+a_{2,3}+a_{3,2}+a_{3,3} & -a_{2,2}-a_{3,2} & -a_{2,3}-a_{3,3} \\ -a_{2,2}-a_{2,3} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ -a_{3,2}-a_{3,3} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \\ &= a_{2,2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{2,3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{3,2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{3,3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, on peut écrire

$$\mathcal{F} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

En tant que sous-espace-engendré par une famille de vecteurs de $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ et les quatre matrices ci-dessous forment une famille génératrice de $\mathcal{F}$.

Pour vérifier qu'elles en forment aussi une base, il **faut** montrer que la famille est libre. C'est un système un peu fastidieux à écrire et on l'omet ici, admettant le résultat. On a bien une famille libre et génératrice de $\mathcal{F}$, donc une base de $\mathcal{F}$ avec les quatre matrices ci-dessus. Ce n'était pas demandé mais on peut également conclure que $\mathcal{F}$ est de dimension 4.

(6) Soit A une matrice de $\mathcal{E}$. On pose : $B = \dfrac{1}{3}s(A)J$ et $C = A - B$.

(a) B est un multiple de J qui est un élément de $\mathcal{E}$ qui est un espace vectoriel, donc $B \in \mathcal{E}$. Mais alors C est la différence et donc une combinaison linéaire de matrices de $\mathcal{E}$ donc encore une matrice de $\mathcal{E}$.

(b) D'après les questions précédentes, $s(C) = s(A) - s(B) = s(A) - \frac{1}{3}s(A)s(J) = 0$. Donc $C \in \mathcal{F}$.

(c) Soit $A \in \mathcal{E}$. On vient de voir que $A = B + A - B = B + C$ ou encore

$$A = \frac{1}{3}s(A)J + \left(A - \frac{1}{3}s(A)J\right),$$

ce qui veut dire que A est combinaison de J et d'une matrice de $\mathcal{F}$.

(d) Utilisant une base de $\mathcal{F}$ et la question précédente, on voit que la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; J\right)$$

engendre $\mathcal{E}$. **Vérifiant** que cette famille est libre (et il faut le faire), on peut conclure qu'elle forme une base de $\mathcal{E}$ qui est donc de dimension 5.

Exercice 3. (D'après **ESCP 2015**, voie T)

Pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$, soit M la matrice carrée d'ordre 2 définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$.

(1) Dans cette question, on choisit $a = b = -1$.

(a) Dans tout l'exercice, on va utiliser la caractérisation de l'inversibilité par le *déterminant*. On pourrait naturellement raisonner autrement. Ici,

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = 0,$$

ainsi, la matrice M n'est pas inversible.

(b) On constate que

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et, par un récurrence immédiate, $M^n = 0$ pour tout $n \geq 2$.

(2) Dans cette question, on choisit $a = b$.

(a) Comme précédemment, on trouve un déterminant nul, donc la matrice n'est pas inversible.

(b) Commençons par observer que

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & a+a^2 \\ 1+a & a+a^2 \end{pmatrix} = (1+a)M,$$

ce qui initialise la récurrence (pour $n = 2$) prouvant la formule demandée. Si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, celle-ci est vraie, alors

$$M^{n+1} = M^n M = (1+a)^{n-1}M^2 = (1+a)^{n-1}(1+a)M = (1+a)^n M,$$

et on a bien la formule au rang $n+1$, ce qui termine la récurrence et démontre la formule demandée.

(3) On revient au cas général où a et b sont des réels quelconques.
On utilise encore la caractérisation de l'inversibilité par le déterminant:

$$\begin{aligned} M \text{ inversible} &\iff \det(M) \neq 0 \\ &\iff \det\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}\right) \neq 0 \\ &\iff b - a \neq 0 \\ &\iff a \neq b. \end{aligned}$$

(4) Dans cette question, on considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre p avec $0<p<1$. On pose : $q=1-p$.
Soit A l'événement : "la matrice N est inversible" où N est la matrice aléatoire définie par

$$N=\begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}.$$

(a) D'après la formule des probabilités totales, appliquée au s.c.e $\{(X=n): n\in\mathbb{N}^*\}$, on a

$$\begin{aligned} P([X=Y]) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P([X=Y]\cap[X=n]) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} P([Y=n]\cap[X=n]) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} P([Y=n])P([X=n]) \qquad \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y) \end{aligned}$$

(b) On reconnait une somme de série géométrique, de raison q^2

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p^2q^{2k-2} = p^2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(q^2\right)^{k-1} = p^2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(q^2\right)^n = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{(1-q)^2}{(1-q)(1+q)} = \frac{1-q}{1+q}$$

(c) D'après les questions précédentes, N est inversible si et seulement si $X\neq Y$. Or, en combinant les deux questions précédentes, on trouve

$$\begin{aligned} P([X=Y]) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P([Y=n])P([X=n]) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(pq^{n-1}\right)^2 \qquad \text{(car } X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi } \mathcal{G}(p)) \\ &= \frac{1-q}{1+q}. \end{aligned}$$

Il suit que

$$P(A) = 1-P(X=Y) = 1-\frac{1-q}{1+q} = \frac{2q}{1+q}.$$

(5) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Dans cette question, on considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et suivant toutes les deux la loi binomiale $\mathcal{B}(n,1/2)$. Soit A l'événement: "la matrice N est inversible" où N est la matrice aléatoire définie par

$$N=\begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}.$$

(a) D'après la formule du binôme, on a

$$(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k$$

et

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k.$$

(b) En utilisant l'identité

$$(x+1)^{2n} = (x+1)^n\,(x+1)^n\,,$$

montrer que l'on a :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

D'après la question précédente, on a

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j\right).$$

On identifie alors, dans cette égalité entre polynômes, les coefficients de x^n. Dans le membre de gauche, ce coefficient est égal à $\binom{2n}{n}$. Dans le membre de droite de l'égalité, on obtient le terme de degré n comme somme de termes $\binom{n}{i}x^i \times \binom{n}{j}x^j$, où $i + j = n$. Posant $k = n - j$, le coefficient de x^n est donc égal à $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$. Au final, on a bien

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

(c) Avec un raisonnement analogue à ce qui précède, on utilise la formule des probabilités totales que l'on applique au s.c.e $\{(X = k) : \ k \in [\![0; n]\!]\}$. On obtient donc

$$\begin{aligned}
P([X = Y]) &= \sum_{k=0}^{n} P([X = Y] \cap [X = k]) = \sum_{k=0}^{n} P([Y = k] \cap [X = k]) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P([X = k])P([X = k]) \qquad \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)^2 \qquad \text{(car } X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi } \mathcal{B}(n, 1/2)) \\
&= \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} \\
&= \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

(d) On trouve

$$P(A) = P(X \neq Y) = 1 - P(X = Y) = 1 - \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$$