ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°3

Travail en temps limité - 4 heures
À rendre le 06/11

*Ce devoir est à faire **individuellement**, en temps limité (4 heures) et sans aide ni document quelconque. Toutes les réponses doivent êtres **justifiées** et **soigneusement rédigées**.*

Temps indicatif: 40 minutes - 50 minutes - 1h10 - 1h20

Exercice 1

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur R_+ par

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}.$$

(1) Étudier les variations de f_n sur R_+. Donner un équivalent de $f_n(x)$ en $+\infty$ et y préciser la limite de $f_n(x)$.

(2) On introduit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = 1/3$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f_n(u_n).$$

(3) Calculer u_2 et u_3.

(4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. En déduire la monotonie de (u_n).

(5) Montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ que l'on déterminera à l'aide d'un raisonnement par l'absurde.

(6) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n \leq \frac{1}{n}.$$

(7) En déduite que la suite (nu_n) est croissante, puis qu'elle converge vers un réell $\ell' \in]0;1]$.

(8) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \leq 1.$$

(9) Conclure quant à la valeur de ℓ'.

Exercice 2

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x$.
Pour tout entier $n \geq 2$, on considère l'équation (E_n) : $g(x) = n$, d'inconnue le réel x.

(1) Montrer que l'équation (E_n) admet exactement deux solutions, l'une strictement négative notée α_n et l'autre strictement positive notée β_n.

(2) **Limite de** β_n.

(a) Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.
(b) Montrer que g réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[1; +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de g^{-1}.
(c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = +\infty$.

(3) **Équivalent de** β_n.

(a) Montrer que: $1 \leqslant g(\ln n) \leqslant n$.
(b) En déduire que: $g(\ln(2n)) \geqslant n$. (*On donne :* $\ln 2 \simeq 0,69$.)
(c) En déduire que $\ln(n) \leqslant \beta_n \leqslant \ln(2n)$, puis en déduire un équivalent de β_n.

Exercice 3

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 3. On considère une urne contenant initialement 1 boule blanche et $N - 1$ boules noires. On effectue des tirages successifs, au hasard, selon le protocole suivant :

- Si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne puis on procède au tirage suivant.
- Si la boule tirée est noire, on ne la remet pas dans l'urne mais on la remplace par une boule blanche puis on procède au tirage suivant.

Ainsi, le nombre de boules dans l'urne reste constant égal à N.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note : B_i (resp. N_i) : "la boule obtenue lors du i-ième tirage est blanche (resp. noire)"
On note $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé associé à cette expérience.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

(1) Justifier soigneusement que $Y(\Omega) = [\![1; N]\!]$.
(2) Déterminer, **en justifiant soigneusement vos calculs**, les probabilités $P(Y = 1)$, $P(Y = 2)$ et $P(Y = 3)$.
(3) Pour tout $k \in Y(\Omega)$, calculer $P(Y = k)$ puis vérifier que $P(Y = N) = \dfrac{(N-1)!}{N^{N-1}}$.

Pour tout entier $n \geq 0$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue des n premiers tirages et par convention, on pose $X_0 = 0$. Ainsi, $X_n(\Omega) \subset [\![0; n]\!]$

Pour simplifier l'étude, on supposera que $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$ en remarquant que $P(X_n = k) = 0$ si $N-1 < k \leq n$.

(5) Soit $n \geq 1$. Déterminer $P(X_n = 0)$.

(6) Soit $n \geq 1$. Justifier soigneusement que pour $k \in [\![1;n]\!]$, on a :

$$[X_n = k] \; = \; [X_{n-1} = k-1] \cap N_n \; \cup \; [X_{n-1} = k] \cap B_n$$

(7) Montrer alors que pour tous les entiers n et k non nuls, on a :

$$P(X_n = k) = \frac{k+1}{N} P(X_{n-1} = k) + \frac{N-k}{N} P(X_{n-1} = k-1).$$

(8) On rappelle que $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$. Déduire de la question précédente que pour tout entier n non nul :

$$E(X_n) = \frac{N-1}{N} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) P(X_{n-1} = k).$$

(9) En déduire que pour tout entier n non nul :

$$E(X_n) = \frac{N-1}{N} E(X_{n-1}) + \frac{N-1}{N}.$$

(10) On pose : $\alpha = \dfrac{N-1}{N}$, $\ell = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$ et pour tout $n \geq 0$, $u_n = E(X_n)$. Ainsi, pour tout n non nul, on a :

$$u_n = \alpha u_{n-1} + \alpha.$$

(a) Vérifier que $u_0 = 0$ puis montrer que le point fixe de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est ℓ.

(b) On pose, pour tout $n \geq 0$: $v_n = u_n - \ell$. Montrer alors que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est géométrique de raison α.

(c) En déduire que pour tout entier naturel n, on a $E(X_n) = \ell(1 - \alpha^n)$.

(11) En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = N - 1.$$

Ce résultat était-il prévisible ?

(12) Compléter les pointillés (en commentant clairement les instructions) dans la fonction `SciLab` suivante pour qu'elle simule la variable X_n.

```
function X=Simu_X(N,n)
        BB = ......... ;
        BN = ......... ;
        p = (N-1)/N ;
        X = ......... ;
        for i=[1:n]
            if rand() < p then
            X = ......... ;
                BN = ......... ;
                BB = ......... ;
                p = ......... ;
                end
        end
endfunction
```

Problème

Partie 1 : étude d'un ensemble de matrices.

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on note E l'ensemble

$$E = \left\{ M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) : \; M = \begin{pmatrix} a & c & d & b \\ b & a & c & d \\ d & b & a & c \\ c & d & b & a \end{pmatrix}, \; (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

(1) (a) Montrer que E est un espace vectoriel.
(b) Montrer que la famille (I, J, K, L) est libre.
(c) En déduire une base de E et préciser sa dimension.

(2) (a) Montrer, en les calculant explicitement, que J^2, K^2, L^2, J^3 et L^3 appartiennent à E.
(b) En déduire, sans aucun calcul matriciel, que JK, KJ, KL, LK, JL et LJ appartiennent aussi à E.
(c) Établir enfin que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E.

(3) On considère les vecteurs de $\mathcal{M}_{4,1}$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Partie 2 : étude d'un mouvement aléatoire.

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0, 1/2[$.

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4, le sommet 4 au sommet 1, les diagonales reliant le sommet 1 au sommet 3 ainsi que le sommet 2 au sommet 4.

Un pion se déplace sur les sommets du carré selon le protocole suivant :

- Le pion est sur le sommet 1 au départ.

- Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet du carré, il se déplace à l'instant suivant vers un sommet voisin(relié par un côté) avec la probabilité p ou vers un sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité $1-2p$.

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le pion à l'instant n. On a donc $X_0 = 1$.

(1) (a) Écrire la matrice A, carrée d'ordre 4, dont le terme situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne est égal à la probabilité conditionnelle $P_{X_n=j}(X_{n+1} = i)$.
(b) Vérifier que A s'écrit comme combinaison linéaire de $J + K$ et L.

(2) (a) Soit P la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont (u_1, u_2, u_3, u_4). Calculer P^2 puis en déduire que P est inversible et expliciter P^{-1}.
(b) Montrer que la matrice D définie par $P^{-1}AP = D$ est diagonale.

(3) Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on pose

$$C_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que $C_{n+1} = AC_n$.
(b) En déduire que

$$C_n = \frac{1}{4} P D^n P C_0,$$

puis donner la loi de probabilité de X_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.