ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°3

Solution

Exercice 1

On fera bien attention à la dépendance en n de la fonction f_n.

On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}.$$

(1) La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de fonctions polynomiales dérivables sur ce même intervalle, dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour $x \geq 0$, on a

$$f_n'(x) = \frac{1+nx^2 - x(2nx)}{(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2},$$

quantité dont on obtient facilement le signe (donné par celui du numérateur), ce qui permet de dresser le tableau de variations de f_n. Avant cela, on peut observer que

$$f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{nx^2} = \frac{1}{nx} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus,

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Ainsi,

x	0		$1/\sqrt{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2\sqrt{n}}$	$\searrow$	0

(2) On introduit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = 1/3$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f_n(u_n).$$

(3) Par définition

$$\begin{aligned} u_2 &= f_1(u_1) = \frac{u_1}{1+u_1^2} \\ &= \frac{1/3}{1+(1/3)^2} \\ &= \frac{3}{10} \\ u_3 &= f_2(u_2) = \frac{u_2}{1+2u_2^2} \\ &= \frac{3/10}{1+2(3/10)^2} \\ &= \frac{15}{59} \end{aligned}$$

(4) On procède par récurrence. $u_1 = 1/3 > 0$, ce qui l'initialise. Si, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$, alors d'après l'étude précédente de la fonction f_n, $u_{n+1} = f_n(u_n) > 0$, ce qui termine la récurrence. Mais alors,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1+nu_n^2} - u_n = \frac{u_n - u_n - nu_n^3}{1+nu_n^2} = -\frac{nu_n^3}{1+nu_n^2} < 0,$$

ce qui permet d'affirmer que la suite (u_n) est décroissante.

(5) La suite (u_n) est minorée (par 0) et décroissante; le théorème de convergence monotone nous permet alors de conclure à la convergence de celle-ci vers une limite ℓ qui vérifie, par passage à la limite dans les inégalités, $\ell \geq 0$.

C'est maintenant qu'il faut faire attention et ne pas se laisser tenter de passer brutalement à la limite dans la relation $u_{n+1} = f_n(u_n)$ car il y a également de la dépendance en n dans la fonction! En effet, on a

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+nu_n^2}.$$

À gauche, la quantité tend vers ℓ. À droite en revanche, cela dépend du dénominateur (le numérateur tend vers ℓ). Celui-ci peut tendre vers $+\infty$, si $\ell \neq 0$ et sinon c'est indéterminé. Supposons alors que $\ell > 0$. Alors,

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{1+nu_n^2} = 0$$

ce qui est absurde. Ainsi, $\ell = 0$.

(6) On procède par récurrence. Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1/3 \leq 1$ et c'est vérifié. Supposons alors que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $u_n \leq 1/n$. Comme $1/n \leq 1/\sqrt{n}$, et que f_n est croissante sur $[0; 1/\sqrt{n}]$, on a

$$u_{n+1} = f_n(u_n) \leq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1/n}{1+n(1/n)^2} = \frac{1}{n+1},$$

ce qui est bien qu'on voulait et qui termine donc la récurrence.

(7) L'inégalité précédente donne (nu_n) majorée (par 1). On a donc envie, afin d'appliquer le théorème de convergence, de montrer que la suite (nu_n) est croissante. Allons-y.

$$\begin{aligned}(n+1)u_{n+1} - nu_n &= \frac{(n+1)u_n}{1+nu_n^2} - \frac{nu_n + n^2u_n^3}{1+nu_n^2} \\ &= \frac{u_n(1-n^2u_n^2)}{1+nu_n^2} \\ &\geq 0\end{aligned}$$

car $u_n \leq 1/n$ donne $u_n^2 \leq 1/n^2$. Ainsi la suite (nu_n) est croissante et converge vers un réel ℓ' avec $\ell' \leq 1$ et $\ell' \geq 1 \cdot u_1 = u_1 > 0$ donc $\ell' \in]0;1]$.

(8) On essaie de manipuler la quantité considérée

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1+nu_n^2}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{nu_n^2}{u_n} = nu_n \leq 1.$$

(9) La différence précédente fait naturellement penser à une somme télescopique. On essaie donc de calculer la somme, pour voir ce qu'on obtient comme information. Par télescopage donc,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_1}.$$

Mais, en utilisant l'inégalité précédente, on a donc

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_1} = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} 1 = n-1,$$

ou encore

$$\frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{u_1} + n - 1$$

ce qui donne aussi

$$u_n \geq \frac{1}{n-1+\frac{1}{u_1}}.$$

Mais, alors, en multipliant par n, on obtient l'encadrement

$$\frac{n}{n-1+\frac{1}{u_1}} \leq nu_n \leq 1$$

et le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\ell' = 1$.

Exercice 2

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x$.
Pour tout entier $n \geq 2$, on considère l'équation (E_n) : $g(x) = n$, d'inconnue le réel x.

(1) C'est une question classique que l'ont résout à l'aide du *théorème de bijection*. Commençons par étudier la fonction g et dresser son tableau de variations. Celle-ci est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^x - 1$, quantité dont on obtient le signe immédiatement

x	$-\infty$	α_n	0	β_n	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	n $\searrow$	1	$\nearrow$ n	$+\infty$

Sur chaque intervalle $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$, g est strictement monotone et continue, elle réalise alors une bijection de $]-\infty;0[$ sur $]1;+\infty[$ et une autre de $]0;+\infty[$ sur $]1;+\infty[$. Ainsi, tout $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$ admet exactement deux antécédents par g: un dans $]-\infty;0[$ (noté α_n) et un dans $]0;+\infty[$ (noté β_n).

(2) **Limite de β_n.**

(a) Comme $g(\beta_n) = n \leq n+1 = g(\beta_{n+1})$ et que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, il suit que $\beta_n \leq \beta_{n+1}$, ou encore que (β_n) est croissante.

(b) On a déjà dit, grâce au théorème de bijection, que g en réalisait une de $\mathbb{R}_+$ sur $[1;+\infty[$. Ce théorème nous donne également les variations de la bijection réciproque g^{-1}:

x	1	$+\infty$
g^{-1}	0 $\nearrow$	$+\infty$

(c) En remarquant que $g(\beta_n) = n \Leftrightarrow \beta_n = g^{-1}(n)$, la limite en $+\infty$ de g^{-1} apparaissant ci-dessus nous donne

$$\lim_{n \to +\infty} \beta_n = \lim_{n \to +\infty} g^{-1}(n) = +\infty.$$

(3) **Équivalent de β_n.**

(a) Sachant que le minimum de g sur $\mathbb{R}_+$ vaut 1 et que $\ln(n) \geq 0$ pour $n \geq 2$, on a déjà $g(\ln(n)) \geq 1$. De plus, comme $\ln(n) \geq 0$, on a aussi

$$g(\ln(n)) = e^{\ln(n)} - \ln(n) = n - \ln(n) \leq n.$$

(b) Remarquant que $1 - \ln(2) \geq 0$, on obtient

$$g(\ln(2n)) = 2n - \ln(2n) = 2n - \ln(2) - \ln(n) = g(\ln(n)) + n - \ln(2) \geq 1 + n - \ln(2) \geq 1.$$

(c) On a, en appliquant la stricte croissante de g (ou de g^{-1})

$$g(\ln(n)) \leq n = g(\beta_n) \leq g(\ln(2n)) \Longleftrightarrow \ln(n) \leq \beta_n \leq \ln(2n) = \ln(n) + \ln(2).$$

En divisant cet encadrement par $\ln(n)$, on obtient, par application du théorème des gendarmes

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\beta_n}{\ln(n)} = 1$$

ou encore

$$\beta_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n).$$

Exercice 3 - Inspiré de ECRICOME 2009, voie S

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 3. On considère une urne contenant initialement 1 boule blanche et $N-1$ boules noires. On effectue des tirages successifs, au hasard, selon le protocole suivant :

- Si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne puis on procède au tirage suivant.
- Si la boule tirée est noire, on ne la remet pas dans l'urne mais on la remplace par une boule blanche puis on procède au tirage suivant.

Ainsi, le nombre de boules dans l'urne reste constant égal à N.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note : B_i (resp. N_i) : "la boule obtenue lors du i-ième tirage est blanche (resp. noire)"
On note $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé associé à cette expérience.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

(1) On peut obtenir la boule blanche dès le premier tirage. Si les $N-1$ premiers tirages amènent une boule noire, l'urne est donc vidée de toutes ses boules noires pour le $N-$ième tirage et celui-ci amène donc une boule blanche. Ainsi, on a déjà $Y(\Omega) \subset [\![1; N]\!]$. Mais si $2 \leq k \leq N-1$, $Y = k$ correspond alors à

$$\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} N_k\right) \cap B_k,$$

dont la probabilité non nulle se calcule à l'aide de la formule des probabilités composées (voir ci-après) et permet donc de voir que $Y(\Omega) = [\![1; N]\!]$.

(2) Par la formule des probabilités composées

$$\begin{aligned}
P(Y=1) &= P(B_1) = \frac{1}{N} \\
P(Y=2) &= P(N_1 \cap B_2) = P(N_1)P_{N_1}(B_2) \\
&= \frac{N-1}{N} \times \frac{2}{N} \\
&= \frac{2(N-1)}{N^2} \\
P(Y=3) &= P(N_1 \cap N_2 \cap B_3) \\
&= P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1 \cap N_2}(B_3) \\
&= \frac{N-1}{N} \times \frac{N-2}{N} \cap \frac{3}{N} \\
&= \frac{3(N-1)(N-2)}{N^3}
\end{aligned}$$

(3) Toujours avec la formule des probabilités composées, si $1 \leq k \leq N$, on a

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= P\left(\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} N_k\right) \cap B_k\right) \\
&= P(N_1)P_{N_1}(N_2)\cdots P_{\bigcap_{1\leq j<k-1} N_j}(N_{k-1})P_{\bigcap_{1\leq j\leq k-1} N_j}(B_k) \\
&= \frac{N-1}{N} \times \frac{N-2}{N} \times \cdots \times \frac{N-1-(k-2)}{N} \times \frac{(k-1)+1}{N} \\
&= \frac{k(N-1)(N-2)\cdots(N-(k-1))}{N^k}
\end{aligned}$$

En particulier, pour $k = N$, on a

$$P(Y=N) = \frac{N(N-1)\cdots 1}{N^N} = \frac{N!}{N^N} = \frac{(N-1)!}{N^{N-1}}.$$

Pour tout entier $n \geq 0$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues à l'issue des n premiers tirages et par convention, on pose $X_0 = 0$. Ainsi, $X_n(\Omega) \subset [\![0;n]\!]$

Pour simplifier l'étude, on supposera que $X_n(\Omega) = [\![0;n]\!]$ en remarquant que $P(X_n = k) = 0$ si $N-1 < k \leq n$.

(5) Par définition de X_n, et toujours avec la formule des probabilités composées en remarquant que, sachant qu'on a obtenus des blanches, la composition de l'urne ne change pas,

$$\begin{aligned}
P(X_n = 0) &= P(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) \\
&= P(B_1)P_{B_1}(B_2)\cdots P_{\bigcap_{1\leq j\leq n-1} B_j}(B_n) \\
&= \left(\frac{1}{N}\right)^n
\end{aligned}$$

(6) Soit $n \geq 1$. On procède par double inclusion

- $[X_{n-1} = k-1] \cap N_n$ signifie qu'on a obtenu $k-1$ boules noires en $n-1$ tirages et que le $n - ime$ tirage amène une boucle noire. Donc, on a k boules noires après n tirages (ou encore $X_n = k$). D'autre part, $[X_{n-1} = k] \cap B_n$ signifie qu'on a déjà k boules noires après les $n-1$ premiers tirages et que le n-ème tirage amène une boule blanche, donc ne change pas le nombre de boules noires obtenues et on a bien encore $X_n = k$. Donc

$$[X_{n-1} = k-1] \cap N_n \ \cup\ [X_{n-1} = k] \cap B_n \subset [X_n = k].$$

- Réciproquement, si $[X_n = k]$, alors le nombre de boules noires après n tirages vaut k. On peut découper selon la couleur de la dernière boule obtenue. Si celle-ci est noire, alors on avait nécessairement eu $k-1$ boules noires après les $n-1$ premiers tirages, sinon on avait déjà les k boules noires. Ainsi,

$$[X_n = k] \subset [X_{n-1} = k-1] \cap N_n \ \cup\ [X_{n-1} = k] \cap B_n$$

On a bien

$$[X_n = k] = [X_{n-1} = k-1] \cap N_n \ \cup\ [X_{n-1} = k] \cap B_n.$$

On aurait aussi pu raisonner directement en utilisant le fait que $\{N_n, B_N\}$ forme un s.c.e.

(7) On utilise alors la question précédente, remarquant que l'union intervenant est bien disjointe

$$\begin{aligned}
P(X_n = k) &= P([X_{n-1} = k-1] \cap N_n) + P([X_{n-1} = k] \cap B_n) \\
&= P_{X_{n-1}=k-1}(N_n)P(X_{n-1} = k-1) + P_{X_{n-1}=k}(B_n)P(X_{n-1} = k)
\end{aligned}$$

Or, sachant $[X_{n-1}=k-1]$, on tire dans une urne qui contient $N-1-(k-1)=N-k$ boules noires et k boules blanches, ainsi

$$P_{X_{n-1}=k-1}(N_n)=\frac{N-k}{N}$$

et de même, sachant $[X_{n-1}=k]$, on tire dans une urne contenant $N-1-k$ boules noires et $k+1$ boules blanches, ainsi

$$P_{X_{n-1}=k}(B_n)=\frac{k+1}{N}$$

ceci menant bien à

$$P(X_n=k)=\frac{k+1}{N}P(X_{n-1}=k)+\frac{N-k}{N}P(X_{n-1}=k-1).$$

(8) On somme la relation précédente et on fera un petit changement d'indice qui fait plaisir

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= \sum_{k=1}^{n} kP(X_n=k)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(k\frac{k+1}{N}P(X_{n-1}=k)+k\frac{N-k}{N}P(X_{n-1}=k-1)\right)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n-1}k(k+1)P(X_{n-1}=k)+\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)(N-j-1)P(X_{n-1}=j)\\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n-1}[k(k+1)+(k+1)(N-k-1)]P(X_{n-1}=k)]\\
&= \frac{N-1}{N}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)P(X_{n-1}=k)
\end{aligned}$$

(9) Par définition de $E(X_{n-1})$ et comme $\sum_{k=0}^{n-1}P(X_{n-1}=k)=1$, on a bien

$$E(X_n)=\frac{N-1}{N}E(X_{n-1})+\frac{N-1}{N}.$$

(10) On pose : $\alpha=\dfrac{N-1}{N}$, $\ell=\dfrac{\alpha}{1-\alpha}$ et pour tout $n\geq 0$, $u_n=E(X_n)$. Ainsi, pour tout n non nul, on a :

$$u_n=\alpha u_{n-1}+\alpha.$$

(a) Comme $X_0=0$, on a $u_0=E(X_0)=0$. De plus,

$$\ell=\alpha\ell+\alpha\iff\ell(1-\alpha)=\alpha\iff\ell=\frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

(b) On a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1}-\ell\\
&= \alpha u_n+\alpha-(\alpha\ell+\alpha)\\
&= \alpha(u_n-\ell)\\
&= \alpha v_n
\end{aligned}$$

et (v_n) est bien géométrique de raison α.

(c) On obtient par une récurrence immédiate que $v_n=\alpha^n v_0=\alpha^n(u_0-\ell)$, ou encore

$$E(X_n)=v_n+\ell=-\ell\alpha^n+\ell=\ell(1-\alpha^n).$$

(11) D'après la question précédente et les notations du texte, $0<\alpha<1$ donc $\alpha^n\to 0$, ainsi,

$$E(X_n)\longrightarrow \ell=\frac{\alpha}{1-\alpha}=\frac{\frac{N-1}{N}}{1-\frac{N-1}{N}}=\frac{1}{N-1}.$$

Pour n devenant très grand, on a obtenu en moyenne $N-1$ boules noires, c'est à dire qu'on a vidé l'urne de ses boules noires. C'est en effet ce qu'on peut intuitivement penser.

(12) Compléter les pointillés (en commentant clairement les instructions) dans la fonction `SciLab` suivante pour qu'elle simule la variable X_n.

```
function X=Simu_X(N,n)
        BB = 1 ; //On commence avec 1 boule blanche
        BN = N-1 ; //et N-1 boules noires
        p = (N-1)/N ;
        X = 0 ; //On initialise X_0=0
        for i=[1:n]
            if rand() < p then        //si on tire une boule noire
            X = X+1 ; //une boule noire en plus
                BN = BN-1 ; //l'urne perd une boule noire
                BB = BB+1 ; //mais gagne une boule blanche
                p = BN/N ;    //la proba de tirer ensuite une noire change
                end
        end
endfunction
```

Problème - D'après EDHEC 2002

Partie 1 : étude d'un ensemble de matrices.

On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

et on note E l'ensemble

$$E=\left\{M\in\mathcal{M}_4(\mathbb{R}):\ M=\begin{pmatrix}a&c&d&b\\b&a&c&d\\d&b&a&c\\d&c&b&a\end{pmatrix},\ (a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\right\}.$$

(1) (a) On constate que

$$M\in E\Longleftrightarrow M=aI+bJ+cK+dL$$

de sorte que $E = \text{Vect}(I, J, K, L)$. Ainsi, E correspond au sous-espace engendré par 4 vecteurs de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et est donc un sous-espace vectoriel de ce dernier et plus généralement un espace vectoriel.

(b) En écrivant $aI + bJ + cK + dL = 0$, la première ligne de la matrice obtenue donne $a = b = c = d = 0$, donc la famille est libre.

(c) La famille (I, J, K, L) est libre et génératrice de E, elle en forme donc une base et on peut déduire que $\dim(E) = 4$.

(2) (a) Le calcul donne

$$J^2 = L, \quad K^2 = K, \quad L^2 = I, \quad L^3 = L, \quad J^3 = J \cdot J^2 = JL = K$$

et il suit donc que J^2, K^2, L^2, J^3 et L^3 appartiennent à E.

(b) On a alors $JK = JJ^3 = J^2J^2 = L^2 = I$, $KJ = J^3J = I$, $KL = KJ^2 = KJJ = IJ = J$, $LK = J^2K = J$, $JL = JK^2 = JKK = IK = K$ et enfin $LJ = K$ donc JK, KJ, KL, LK, JL et LJ appartiennent aussi à E.

(c) En développant une combinaison linéaire de 2 matrices de E :
$(aI + bJ + cK + dL)(a'I + b'J + c'K + d'L)$, on obtient une combinaison linéaire des produits des matrices I, J, K et L, qui sont tous dans E.
Donc le produit se trouve encore dans E.

(3) On considère les vecteurs de $\mathcal{M}_{4,1}$:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour montrer que ces quatre vecteurs forment une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ dont la dimension est 4, il suffit donc de vérifier que la famille est libre. Mais alors

$$au_1 + bu_2 + cu_3 + du_4 = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a+b+c+d &=& 0 \\ a-b+c-d &=& 0 \\ a+b-c-d &=& 0 \\ a-b-c+d &=& 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a+b+c+d &=& 0 \\ 2b+2d &=& 0 \\ 2c+2d &=& 0 \\ 2b+2c &=& 0 \end{array} \right.$$

$$\iff a = b = c = d = 0$$

La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est bien libre et forme une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

Partie 2 : étude d'un mouvement aléatoire.

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0, 1/2[$.

Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4, le sommet 4 au sommet 1, les diagonales reliant le sommet 1 au sommet 3 ainsi que le sommet 2 au sommet 4.

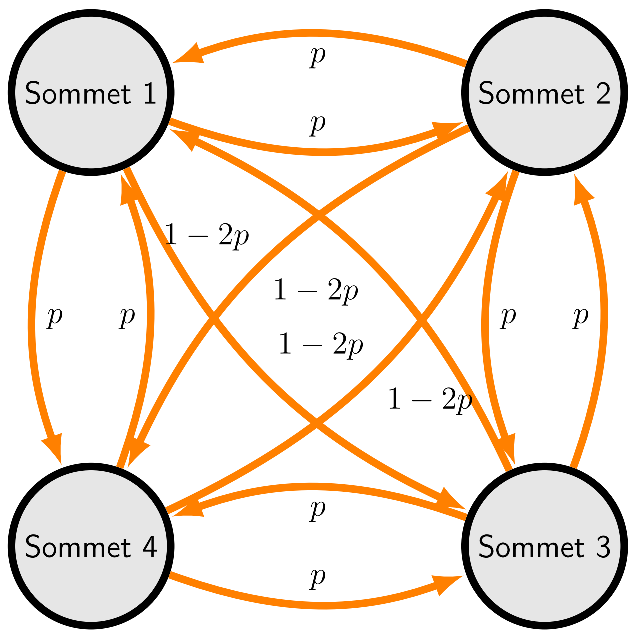
Un pion se déplace sur les sommets du carré selon le protocole suivant :

- Le pion est sur le sommet 1 au départ.

- Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet du carré, il se déplace à l'instant suivant vers un sommet voisin(relié par un côté) avec la probabilité p ou vers un sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité $1-2p$.

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le pion à l'instant n. On a donc $X_0 = 1$.

(1) (a) D'après la description des lois du mouvement du pion, on a le graphe probabiliste suivant



ce qui donne la *matrice de transition* ci-dessous, où le coefficient situé à la $i-$ème ligne et à la $j-$ème colonne correspond à $P_{X_n=j}(X_{n+1}=i)$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-2p & p \\ p & 0 & p & 1-2p \\ 1-2p & p & 0 & p \\ p & 1-2p & p & 0 \end{pmatrix}$$

(b) On constate sans surprise ni difficulté que

$$A = p(J+K) + (1-2p)L.$$

(2) (a) Par définition, on a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

ce qui donne

$$P^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I$$

ou encore $P \cdot \frac{1}{4}P = I$. Ainsi, P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{4}P$.

(b) On fait le calcul (un peu fastidieux mais pas si long que ça non plus)

$$P^{-1}AP = \frac{1}{4}PAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-4p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2p-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p-1 \end{pmatrix} = D$$

ce qui est bien une matrice diagonale.

(3) Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on pose

$$C_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix}.$$

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\{(X_n = 1), (X_n = 2), (X_n = 3), (X_n = 4)\}$ forme un système complet d'évènements[1]. Donc, pour $n \geq 2$, la formule des probabilités totales appliquée à ce s.c.e donne

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 1) + P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 2) \\ &\qquad + P_{X_n=3}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 3) + P_{X_n=4}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 4) \\ &= pP(X_n = 2) + (1-2p)P(X_n = 3) + pP(X_n = 4), \end{aligned}$$

ce qui est bien le produit de la première ligne de A et de la matrice colonne C_n. La même chose pour les trois autres lignes donne bien $C_{n+1} = A \cdot C_n$, pour $n \geq 2$. On vérifie *à la main* que la formule reste vraie pour $n = 0$ et $n = 1$:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 1-2p \\ p \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} AC_0.$$

On utilise, pour déterminer C_2 la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{(X_1 = 2), (X_1 = 3), (X_1 = 4)\}$. On obtient

$$C_2 = \begin{pmatrix} (1-2p)^2 + 2p^2 \\ 2p(1-2p) \\ 2p^2 \\ 2p(1-2p) \end{pmatrix} = AC_1$$

et la formule reste donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) C'est une récurrence ultra-classique.

- <u>initialisation:</u> $C_0 = \frac{1}{4}PD^0PC_0$ car $D^0 = I$ et $\frac{1}{4}PIP = I$.

[1] Il est en effet raisonnable de l'admettre. Le sujet pourrait néanmoins, comme pour l'épreuve EDHEC 2017, demander de le montrer. Il faut alors montrer qu'aucune des probabilités $P(X_n = i)$ n'est nulle. On procède alors dans ce cas par récurrence.

- <u>hérédité:</u> Supposons, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, que $C_n = \frac{1}{4} P D^n P$ (HR). Alors,

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= AC_n \\ &= \frac{1}{4} PDP \cdot \frac{1}{4} PD^n PC_0 \\ &= \frac{1}{4} P\left(D \cdot D^n\right) P \cdot C_0 \\ &= \frac{1}{4} PD^{n+1} P \cdot C_0 \end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence.

Comme

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-4p)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2p-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2p-1)^n \end{pmatrix},$$

on a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-4p)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2p-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (2p-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + (1-4p)^n + 2\,(2p-1)^n \\ 1 - (1-4p)^n \\ 1 + (1-4p)^n - 2\,(2p-1)^n \\ 1 - (1-4p)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarque. La suite (X_n) est un exemple de *chaîne de Markov.* On constate ici que, pour chaque sommet $i \in [\![1;4]\!]$

$$\lim_{n \to +\infty} P(X_n = i) = \frac{1}{4},$$

ce qui veut dire que la chaîne de Markov (X_n) *converge en loi* vers la loi uniforme $\mathcal{U}([\![1;4]\!])$.