Devoir Maison n°4

À rendre le 28/11

On revient au format du Devoir Maison travaillé par binôme. On rendra donc, après un travail réalisé en équipe, une seule copie pour deux.

Exercice 1

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2} \mathrm{d}x.$$

(1) Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.
(2) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale I_n est convergente.
(3) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = (n+1)I_n$$

(4) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!.$$

Exercice 2

Soit $\alpha > 0$. On considère les fonctions f_1 et f_2, définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f_1(x) = e^{\alpha x}, \qquad f_2(x) = xe^{\alpha x},$$

on note E l'espace vectoriel $E = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ (E est donc un sous-espace vectoriel est de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$) et Δ l'endomorphisme de E défini par

$$\Delta : g \longmapsto g'.$$

(1) Vérifier que (f_1, f_2) est libre et forme bien une base de E.
(2) Quelle est la matrice, que l'on notera A, de Δ dans cette base ?
(3) L'endomorphisme Δ est-il un automorphisme?
(4) Calculer A^2 puis A^3. Conjecturer une formule pour A^n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) que l'on démontrera par récurrence.
(5) En déduire les expression de $f_1^{(n)}(x)$ et $f_2^{(n)}(x)$.

Exercice 3

(1) On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Vérifier que l'on a $A^2 \neq 0$ et calculer A^3.
(b) Déterminer une base (u) de $\mathrm{Ker}\,(f)$ ainsi qu'une base (v, w) de $\mathrm{Im}\,(f)$.
(c) Montrer que $\mathrm{Im}\,(f^2) = \mathrm{Ker}\,(f)$.

Dans la suite, on considère un endomorphisme g de R^3 tel que

$$g^2 \neq 0, \qquad \text{et} \qquad g^3 = 0,$$

ce qui signifie que $g \circ g$ n'est pas l'endomorphisme nul, mais que $g \circ g \circ g$ est l'endomorphisme nul. En désignant par M la matrice de g dans la base canonique $\mathbb{R}^3$ de $\mathbb{R}^3$ on a donc : $M^2 \neq 0$ et $M^3 = 0$.

On se propose de montrer, dans ce cas plus général, que $\mathrm{Im}\,(g^2) = \mathrm{Ker}\,(g)$.

(2) (a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2\,(u) \neq 0$.
(b) Montrer que $(u, g\,(u)\,, g^2\,(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathcal{B}'$.
(c) Donner la matrice N de g dans la base $\mathcal{B}'$.
(d) Déterminer $\mathrm{Im}\,(g)$ et donner sa dimension. En déduire une base de $\mathrm{Ker}\,(g)$. Pour finir, déterminer $\mathrm{Im}\,(g^2)$ puis conclure.