Devoir Maison n°5

Solution

Exercice 1 - D'après ESC 2002

On considère, pour n entier naturel non nul, les fonctions f_n et h définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f_n(x) = \frac{n\ln(x)}{n+1+nx^2}, \qquad h(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}.$$

(1) f_n et h sont deux quotients de fonctions usuelles continues dont les dénominateurs ne s'annulent pas, ainsi ces deux fonctions sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, ces dénominateurs sont strictement positifs donc le signe est donné par le numérateur, (comme $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire par le signe de $\ln(x)$. Ainsi, on a le tableau de signe ci-dessous

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	

(2) (a) L'intégrale est impropre en $+\infty$. Soit $A \geq 1$. On procède par intégration par parties en posant

$$u'(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad u(x) = -\frac{1}{x}$$
$$v(x) = \ln(x), \qquad v'(x) = \frac{1}{x}$$

Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1;+\infty[$ rendant l'IPP licite. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^A + \int_1^A \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\\ &= -\frac{\ln(A)}{A} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^A\\ &= -\frac{\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1\\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \qquad \text{(par croissance comparée).}\end{aligned}$$

(b) Cette intégrale est également impropre en $+\infty$. On constate que, pour tout $x \geq 1$,

$$0 \leq h(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2} \leq \frac{\ln(x)}{x^2}$$

Ainsi, par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, on peut conclure que

$$\int_1^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x$$

converge. On note K sa valeur.

(3) (a) L'intégrale est impropre en 0 (le ln() n'y est pas défini hein). Soit donc $\varepsilon > 0$. On pose

$$u = u(x) = \frac{1}{x} \Longleftrightarrow x = \frac{1}{u}$$

La fonction u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon; 1]$ et y est bijective rendant le changement de variable licite. De plus,

$$\mathrm{d}u = u'(x)\mathrm{d}x \Longleftrightarrow \mathrm{d}u = -\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \Longleftrightarrow \mathrm{d}x = -\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^1 h(x)\mathrm{d}x &= \int_\varepsilon^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= -\int_{1/\varepsilon}^1 \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{u^2\left(1+\frac{1}{u^2}\right)}\mathrm{d}u \\
&= -\int_1^{1/\varepsilon} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\mathrm{d}u \\
&\underset{\epsilon\to 0^+}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty} h(u)\mathrm{d}u = K
\end{aligned}$$

(b) D'après l'étude du signe de la fonction h à la toute première question, on peut écrire que

$$|h(x)| = \begin{cases} -h(x), & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ h(x), & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Comme les deux intégrales $\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x$ et $\int_1^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x$ convergent, la relation de Chasles nous permet d'affirmer que $\int_0^{+\infty} |h(x)|\mathrm{d}x$ converge et

$$\int_0^{+\infty} |h(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 |h(x)|\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} |h(x)|\mathrm{d}x = -\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x = -(-K) + K = 2K.$$

(c) L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x$ converge absolument (d'après la question précédente). Elle est donc, par un résultat du cours, également convergente. Et on a

$$\int_0^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 h(x)\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x = -K + K = 0.$$

(4) (a) Commençons par voir que, pour tout $x > 0$,

$$1 + nx^2 + n = n(1+x^2) + 1 \geq n(1+x^2) \quad \Longrightarrow \quad \frac{n}{1+nx^2+n} \leq \frac{n}{n(1+x^2)} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Maintenant,

- Pour $0 < x \leq 1$, $\ln(x) \leq 0$ donc
$$\frac{n}{n+1+nx^2} \times \ln(x) \geq \frac{\ln(x)}{1+x^2}$$
ou encore
$$-f_n(x) \leq -h(x).$$
- Pour $x \geq 1$, $\ln(x) \geq 0$ donc
$$\frac{n}{n+1+nx^2} \times \ln(x) \leq \frac{\ln(x)}{1+x^2}$$
ou encore
$$f_n(x) \leq h(x).$$

Connaissant - par la toute première question - les signes de $f_n(x)$ et $h(x)$, on peut donc bien déduire que, pour tout $x > 0$,
$$|f_n(x)| \leq |h(x)|.$$
Par critère de comparaison des intégrales de fonctions positives (comme $\int_0^{+\infty} |h(x)|\mathrm{d}x$ converge), on peut conclure que $\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x$ converge, c'est à dire que $\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge.

(b) Soit $x > 0$,
$$\begin{aligned} h(x) - f_n(x) &= h(x) - h(x) \times \frac{n(1+x^2)}{n+nx^2+1} \\ &= h(x)\left(1 - \frac{n(1+x^2)}{n+nx^2+1}\right) \\ &= h(x) \times \frac{n+nx^2+1-n-nx^2}{n+nx^2+1} \\ &= \frac{h(x)}{n+nx^2+1}. \end{aligned}$$

(c) Pour $x \geq 1$, on a donc - sachant que $h(x) \geq 0$
$$0 \leq h(x) - f_n(x) = \frac{h(x)}{n+nx^2+1} \leq \frac{h(x)}{n+1}$$
ce qui donne, par positivité de l'intégrale, comparaison et convergence de $\int_1^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x$,
$$0 \leq \int_1^{+\infty} (h(x) - f_n(x))\mathrm{d}x \leq \int_1^{+\infty} \frac{h(x)}{n+1}\mathrm{d}x = \frac{K}{n+1}.$$
D'autre part, pour $0 < x \leq 1$, comme $h(x) \leq 0$, on a
$$\frac{h(x)}{n+1} \leq \frac{h(x)}{n+nx^2+1} = h(x) - f_n(x) \leq 0,$$
et, toujours par positivité de l'intégrale, comparaison, et convergence de $\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x$ (vers $-K$)
$$-\frac{K}{n+1} \leqslant \int_0^1 (h(x) - f_n(x))\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

(d) On commence par voir que, par linéarité de l'intégrale - toutes les intégrales étant ici convergentes d'après ce qui précède -
$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 h(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 (f_n(x) - h(x))\mathrm{d}x.$$

Or, par le théorème des gendarmes, le deuxième terme du membre de droite tend vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 h(x)\mathrm{d}x = -K.$$

De même,

$$\int_1^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty}(f_n - h(x))(x)\mathrm{d}x$$

et pour la même raison,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x = K.$$

Au final, on a bien

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = -K + K = 0.$$

Exercice 2

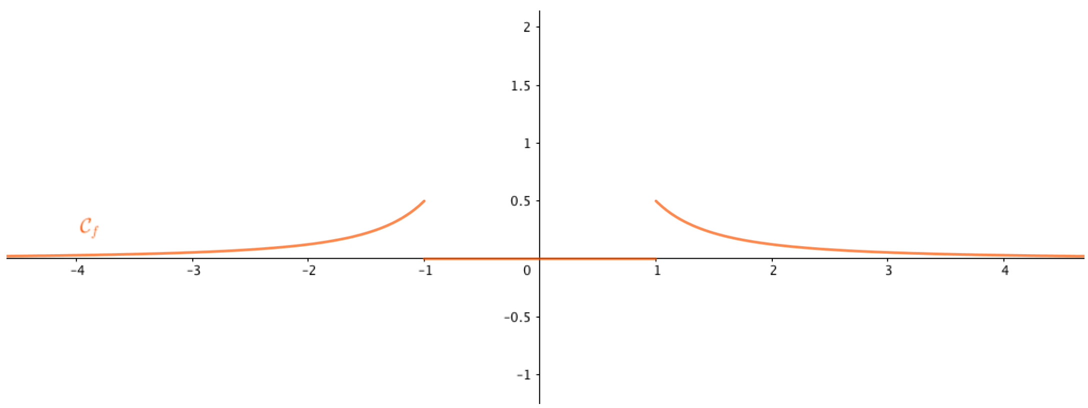
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2}, & \text{si } |x| \geq 1 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

(1) Il faut montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$. C'est facile. En effet,

- Si $-1 < x < 1$, alors $-1 < -x < 1$ et $f(-x) = 0 = f(x)$.
- Si $x \leq -1$ ou $x \geq 1$ alors $-x \leq -1$ ou $-x \geq 1$ et donc $f(-x) = \frac{1}{2(-x)^2} = \frac{1}{2x^2} = f(x)$.

On dessine sommairement pour se représenter la situation la courbe de f sur $\mathbb{R}$. On observe notamment la parité (symétrie par rapport à l'axe des ordonnées) et la discontinuité en -1 et en 1.



(2) D'après le cours, il faut donc vérifier trois points:

- Que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ceci est clair; f est nulle sur $]-1;1[$ et ailleurs, $f(x) = 1/2x^2 > 0$.

- Que f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. Sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+/\infty[$, f est continue comme inverse d'une fonction polynômiale (donc continue) qui ne s'annule pas. Ailleurs, f est constante égale à 0 donc continue. En -1 et 1, f n'est pas continue, mais ce n'est pas grave car il ne s'agit que de deux points.

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut 1. Par parité, il suffit de montrer la convergence sur $[0;+\infty[$ et comme f est nulle sur $[0;1[$, il suffit de montrer la convergence de $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ et que cette intégrale vaut 1/2. Soit donc $A \geq 1$

$$\begin{aligned}\int_1^A f(x)\mathrm{d}x &= \int_1^A \frac{\mathrm{d}x}{2x^2} \\ &= \left[-\frac{1}{2x}\right]_1^A \\ &= -\frac{1}{2A}+\frac{1}{2} \\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2},\end{aligned}$$

ce qu'on voulait. f est donc bien une densité de probabilité.

(3) On sait que

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x)\mathrm{d}x.$$

Il faut donc différencier des cas selon la position de t

- Si $t \leq -1$,

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to-\infty}\int_A^t \frac{\mathrm{d}x}{2x^2} = \lim_{A\to-\infty}\left[-\frac{1}{2x}\right]_A^t = -\frac{1}{2t}.$$

- Si $-1 \leq t \leq 1$,

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-1} f(x)\mathrm{d}x + \int_1^t f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

- Si $t \geq 1$,

$$\begin{aligned}F_X(t) &= \int_{-\infty}^t f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\infty}^{-1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^t f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \int_1^t f(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2t} = 1-\frac{1}{2t}.\end{aligned}$$

Au final,

$$F_X(t) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2t}, & \text{si } t \leq -1 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{si } -1 \leq t \leq 1 \\ 1-\dfrac{1}{2t}, & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

(4) Par définition, X admet une espérance si et seulement si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \quad \text{converge absolument} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x)\mathrm{d}x \quad \text{converge.}$$

Comme la fonction $x \mapsto |x|f(x)$ est paire (produit de fonctions paires), cette convergence est équivalente à celle sur $[0;+\infty[$. Comme f est nulle sur $[0;1[$, la convergence est elle-même équivalente à celle de

$$\int_1^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{x}{2x^2}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x}.$$

Or, cette intégrale diverge (par le critère de Riemann). Donc X n'admet pas d'espérance.

(5) On pose ensuite $Y = \ln(|X|)$. On **admet** que Y est une v.a définie sur le même espace probabilisé et on note sa fonction de répartition F_Y.

(a) On revient à la définition de la fonction de répartition

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) = P(\ln(|X|) \leq x) \\ &= P(|X| \leq e^x) \\ &= P(-e^x \leq X \leq e^x) = P(X \leq e^x) - P(X < -e^{-x}) \\ &= F_X(e^x) - F_X(-e^x). \end{aligned}$$

(b) Il faut donc évaluer F_X en e^x et en $-e^x$. Commençons par remarquer que

- $x < 0 \iff (0 < e^x \leq 1$ **et** $0 > -e^x \geq -1)$
- $x \geq 0 \iff (e^x \geq 1$ **et** $-e^x \leq -1)$

Ainsi,

$$F_Y(x) = F_X(e^x) - F_X(-e^x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1} = 0, & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{2e^x} - \left(-\dfrac{1}{-2e^x}\right) = 1 - e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On reconnait la fonction de répartition de la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. Ainsi, Y est bien une v.a à densité et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

(6) (a) On montrer sans la moindre difficulté les inégalités demandées:
(i) Si $x < 0$, alors $-x > 0$ donc $e^{-x} > 1$ et donc $1 - e^{-x} < 0$;
(ii) Si $x \geq 0$, alors $-x \leq 0$ donc $0 < e^{-x} \leq 1$ et donc $1 - e^{-x} \in [0;1[$.

(b) On considère une v.a U de loi uniforme $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1[)$. C'est une question **ultra-classique** qu'on sait faire *fingers in the nose.*

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= P(Z \leq t) = P(-\ln(1-U) \leq t) \\ &= P(\ln(1-U) \geq -t) = P(1-U \geq e^{-t}) \\ &= P(U \leq 1 - e^{-t}). \end{aligned}$$

On connait la fonction de répartition de la loi uniforme et la question précédente permet de localiser $1 - e^{-t}$. Ainsi,

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-t}, & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

On reconnait donc la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi, $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

(7) Comme $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, d'après la question précédente, il suffit d'utiliser la commande `rand()`.

```
function Y=DM5()
    Y=-log(1-rand());
endfunction
```

(8) C'est parti

```
V=[]
for k=1:10000
    V=[V, DM5()]
end
x=0:0.1:10
histplot(x, V)

plot2d(x, exp(-x), style=5) //style=5 permet de tracer la courbe de la densité
de Y en rouge
```