ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°7

À rendre le 28/01

Exercice 1

Pour tout réel a, on considère la fonction f_a, définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f_a(x,y) = \left(1 + y + xy + ax^2\right) e^y.$$

Partie I - Étude des extrema de f_a

Dans cette partie, on suppose $a \neq 0$ et $a \neq -\dfrac{1}{2}$

(1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

(2) (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f_a.
(b) En déduire que f_a possède deux points critiques dont on précisera les coordonnées.

(3) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f_a.

(4) Montrer que, si λ_1 et λ_2 sont les racines d'un trinôme de la forme $x^2 - sx + p$ alors

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 & = & s \\ \lambda_1 \lambda_2 & = & p \end{cases}$$

(5) (a) Examiner, pour chacun des deux points critiques, à quelle condition portant sur a, f_a présente en ces points un extremum local. (*On utilisera la question précédente.*)
(b) Déterminer, en distinguant trois cas, si f_a présente sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ un maximum local ou un minimum local et donner sa valeur en fonction de a.

Partie II - Étude d'un fonction définie à l'aide de f_a

(1) (a) Montrer que l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{x} e^y \mathrm{d}y$$

converge et donner sa valeur.

(b) Pour tout réel x, montrer grâce à une intégration par parties, que l'intégrale

$$J = \int_{-\infty}^{x} ye^{y}\mathrm{d}y$$

converge et donner sa valeur.

(2) (a) Déduire des deux questions précédentes que l'on définit bien une fonction F_a, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, en posant

$$F_a(x) = \int_{-\infty}^{x} f_a(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

(b) Après avoir écrit $F_a(x)$ en fonction de a et de x, donner le tableau de variations de F_a. (On distinguera les trois cas : $a=-1, a<-1$ et $a>-1$.)

Exercice 2

E désigne l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels, dont le degré est inférieur ou égal à 2.

Partie I - Étude d'un endomorphisme de E.

On considère l'application f qui, à tout élément P de E, associe la fonction polynôme Q telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad Q(x) = (x-1)P'(x) + P(x)$$

et $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de E définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x \quad \text{et} \quad P_2(x) = x^2.$$

(1) Montrer que f est un endomorphisme de E.
(2) Vérifier que la matrice A de f dans $\mathcal{B}$, s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(3) Quelles sont les valeurs propres de f ? f est-il diagonalisable ? f est-il un automorphisme de E ?
(4) Déterminer l'image par f des fonctions polynômes R_0, R_1, R_2 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad R_0(x) = 1, \quad R_1(x) = x-1 \quad \text{et} \quad R_2(x) = (x-1)^2$$

(5) Montrer que $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2)$ est une base de vecteurs propres de f. Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.
(6) Vérifier que pour tout réel x :

$$\begin{cases} R_2(x) + 2R_1(x) + R_0(x) = P_2(x) \\ R_1(x) + R_0(x) = P_1(x) \end{cases}$$

En déduire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.
(7) Écrire A^{-1} en fonction de D^{-1}. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\left[A^{-1}\right]^n = P\left[D^{-1}\right]^n P^{-1}$$

et expliciter la troisième colonne de la matrice $[A^{-1}]^n$.

Partie II - Suite d'épreuves aléatoires.

On dispose d'une urne qui contient trois boules numérotées de 0 à 2.

On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante :

- La première épreuve consiste à choisir au hasard une boule dans cette urne.
- Si j est le numéro de la boule tirée, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à j, le tirage suivant se faisant alors dans l'urne ne contenant plus que les boules numérotées de 0 à j.

On considère alors la variable aléatoire réelle X_k égale au numéro de la boule obtenue à la $k^{ème}$ épreuve.
On note alors U_k la matrice uni colonne définie par :

$$U_k = \begin{pmatrix} P\left[X_k = 0\right] \\ P\left[X_k = 1\right] \\ P\left[X_k = 2\right] \end{pmatrix}$$

où $P\left[X_k = j\right]$ est la probabilité de tirer la boule numéro j à la $k^{ème}$ épreuve.

On convient de définir la matrice U_0 par :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer la loi de X_2 puis calculer l'espérance et la variance de X_2.

(2) Par utilisation de la formule des probabilités totales, prouver que pour tout entier naturel k :

$$U_{k+1} = A^{-1} U_k.$$

(3) Écrire U_k en fonction de A^{-1} et U_0.

(4) Pour tout k de $\mathbb{N}$, donner la loi de X_k et vérifier que l'on a :

$$\lim_{k \to +\infty} P\left[X_k = 0\right] = 1, \qquad \lim_{k \to +\infty} P\left[X_k = 1\right] = 0, \qquad \lim_{k \to +\infty} P\left[X_k = 2\right] = 0$$

(5) Compléter le programme `SciLab` suivant afin qu'il permette de représenter graphiquement des réalisations de $X_0, X_1, ..., X_n$, où n est rentré par l'utilisateur.

```
n=input('n=?')
M=[.....................................................]
X=grand(n, 'markov', M, ............ )
X=[.........., ...........]
plot2d(0:n, X, -1)
```